1. Seja u a solução do problema

$$\begin{cases} u_t - \nabla^T(a(x)\nabla u) + cu = 0, & x \in \Omega \in \mathbb{R}^n, \quad t \in]0,T], \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \in]0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

onde $c > 0$ e $a(x)$ uma função positiva e limitada para todo o x em Ω. Mostre que:

(a) $\|u(t)\|_0 \leq \|u_0\|_0, \quad t \geq 0$;

(b) $\|\nabla u(t)\|_0 \leq C\|\nabla u_0\|_0, \quad t \geq 0$.

(c) Considere o caso em que $n = 1$, $\Omega =]0,1[$, $c = 0$ e $a(x) = a > 0$, para todo o $x \in \Omega$. Para resolver numericamente este problema, considere o esquema de diferenças finitas

$$U_j^{m+1} = U_j^m + r(U_{j+1}^m - 2U_j^m + U_{j-1}^m), \qquad U_0^m = U_N^m = 0,$$

com $r = a\Delta t/h^2$, definido numa rede uniforme de espaçamentos Δt no tempo e $h = 1/N$ no espaço. Mostre que o método é incondicionalmente estável relativamente à versão discreta da norma $\|\cdot\|_0$.

2. Considere o método de Friedrichs

$$U_j^{m+1} = \frac{1}{2}(1-r)U_{j+1}^m + \frac{1}{2}(1+r)U_{j-1}^m,$$

com $r = b\Delta t/h$, $b \in \mathbb{R}^+$, aplicado à resolução numérica do problema de convecção

$$\begin{cases} u_t + bu_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

definido numa rede uniforme de espaçamentos Δt no tempo e h no espaço.

(a) Deduza uma desigualdade para a estabilidade do problema relativamente à norma euclidana $\|\cdot\|_0$.

(b) Diga em que condições o método é estável, relativamente à norma $\|\cdot\|_\infty$.

(c) Diga em que condições o método converge.