DATA DE RECEPÇÃO: **13/03/2009** **Ficha 1** DATA DE ENTREGA: **14/04/2009**

1. Considere o problema de condições de fronteira

$$\begin{cases} -u'' + cu' = 0, \quad x \in]0,1[, \quad c \in \mathbb{R}, \\ \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 1. \end{cases}$$

   (a) Determine o sistema algébrico que lhe permite obter a solução aproximada do problema usando diferenças centradas de segunda ordem numa malha uniforme de espaçamento $h = 1/N$, $N \geqslant 2$.

   (b) Mostre que a solução exacta do sistema algébrico obtido é

$$U_i = \frac{1 - r^i}{1 - r^{n+1}}, \quad i = 1, \ldots, N-1,$$

   onde

$$r = \frac{1+p}{1-p}, \quad \text{com} \quad p = \frac{ch}{2}.$$

   (c) Que condições deverá impôr a h por forma a evitar oscilações na solução aproximada.

2. Considere o problema de Poisson num quadrado unitário. Deduza um esquema compacto de diferenças finitas com 9 pontos de ordem 4 para aproximar a solução do problema.

   Nota: ver W. Hackbusch, *Elliptic differential equations : theory and numerical treatment*, Berlin, Springer, 1992. Cota: 65N/HAC.

3. Considere um sólido que ocupa uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$, (aberto, limitado, simplesmente conexo), de fronteira $\partial\Omega$; possui uma determinada condutividade térmica k (J/m ^{o}C s); encontra-se sujeito a uma determinada fonte de calor de radiação q (J/m^3 s) e a uma determinada temperatura imposta ao longo da fronteira $u|_{\partial\Omega} = g$ (^{o}C). Então, a distribuição de temperatura ao longo do sólido (em regime estacionário) obdece ao seguinte problema:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(k\nabla u) = q, \quad & \text{em } \Omega, \\ \\ u|_{\partial\Omega}, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

   que, no caso de k ser constante (homogeneidade) se reduz a:

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{q}{k}, \quad & \text{em } \Omega, \\ \\ u|_{\partial\Omega}, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

   Utilizando o método das diferenças finitas, resolva o seguinte problema de transmissão de calor numa placa rectâncular $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ com 6×5 cm^2 em regime estacionário, que foi uniformemente aquecida:

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{q}{k}, & \text{em } \Omega =]0,6[\times]0,5[, \\ \\ u(x,0) = x(6-x), u(x,5) = 0, & 0 \leqslant x \leqslant 6, \\ \\ u(0,y) = y(5-y), u(y,6) = 0, & 0 \leqslant y \leqslant 5, \end{cases}$$

   considerando $k = 4{,}35$ J/cm ^{o}C s e $q = 6{,}3$ J/cm^3 s.