Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Métodos Numéricos para Equações com Derivadas Parciais (2009/2010)

Data de recepção: **08/03/2010** **Folha de problemas 1** Data de entrega: **05/04/2010**

1. Considere o problema
$$-(p(x)u')' + q(x)u = f, \qquad x \in \Omega =]0,1[, \qquad u(0) = u(1) = 0,$$
com p uma função positiva.
   (a) Obtenha um esquema de diferenças finitas consistente para o problema dado e indique a sua ordem de consistência.
   (b) Estabeleça condições para que o método dado na alínea anterior seja convergente e indique uma estimativa para o erro global.

2. Dado um intervalo aberto $]a,b[$ da recta real, seja $H_a^1(]a,b[) = \{v \in H^1(]a,b[) \ : \ v(a) = 0\}$.
   (a) Escrevendo
$$v(x) = \int_a^x v'(\xi)d\xi, \qquad a \leq x \leq b,$$
para $v \in H_a^1(]a,b[)$, mostre que é válida a seguinte desigualdade (de Poincaré-Friedrichs)
$$\|v\|_0^2 \leq \frac{1}{2}(b-a)^2|v|_1^2, \qquad \forall v \in H_a^1(]a,b[).$$
   (b) Escrevendo
$$v(x) = 2\int_a^x v(\xi)v'(\xi)d\xi, \qquad a \leq x \leq b,$$
para $v \in H_a^1(]a,b[)$, mostre que é válida a seguinte desigualdade (de Agmon)
$$\max_{x\in[a,b]} |v(x)|^2 \leq 2\|v\|_0|v|_1, \qquad \forall v \in H_a^1(]a,b[).$$

3. Dado $f \in L_2(]0,1[)$, obtenha a formulação fraca para cada um dos seguintes problemas de condição de fronteira:
   (a) $-u'' + u = f(x)$, para $x \in]0,1[$, $u(0) = u(1) = 0$;
   (b) $-u'' + u = f(x)$, para $x \in]0,1[$, $u(0) = u'(1) = 0$;
   (c) $-u'' + u = f(x)$, para $x \in]0,1[$, $u(0) = u(1) + u'(1) = 0$.

   Recorra ao Teorema de Lax-Milgram para mostrar que cada um das três formulações fracas obtidas tem uma correspondente solução única.

4. (a) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que, para todo o $\epsilon > 0$,
$$ab \leq \frac{\epsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\epsilon}b^2,$$
e
$$a + b \leq \left[(1+\epsilon)a^2 + \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)b^2\right]^{1/2}.$$
   (b) Mostre que a forma bilinear $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, com $V = H_0^1(]0,1[)$,
$$a(u,v) = \int_0^1 (p(x)u'v' + q(x)u'v + r(x)uv)dx,$$
com $\underline{p} = \inf_{x\in[0,1]} p(x) > 0$, q não nula e $\underline{r} = \inf_{x\in[0,1]} |r(x)|$ é limitada e, se
$$\|q\|_\infty^2 < 4\underline{p}\underline{r}$$
é também elíptica.