**Optimização Combinatória** — Primeira frequência
Universidade de Coimbra — 1 página
Professor João Soares — 1 de Abril de 2008

---

1. Seja $G = (V, E)$ um ciclo com quatro vértices $a, b, c, d$ e com arestas $ab, bc, cd, ad$ de pesos $1, 3, 2, 3$, respectivamente.

   (a) Identifique a sequência de florestas encontradas durante o Algoritmo de Prim para calcular a árvore geradora de peso mínimo (em $G$).

   (b) Identifique a sequência de florestas encontradas durante o Algoritmo de Kruskal para calcular a árvore geradora de peso mínimo (em $G$).

   (c) Prove que, num grafo conexo no qual os pesos das arestas são todos distintos, a árvore geradora mínima é única.

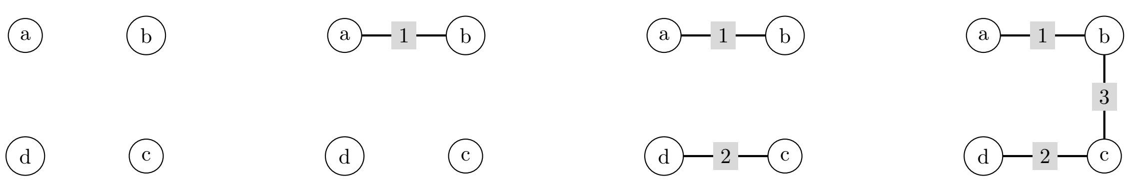
   *Solução:*

   (a) Qualquer vértice serve para dar início ao algoritmo. Ver Figura 1.

(a) It 0 (b) It 1 (c) It 2 (d) It 3

Figura 1: Resolução pelo Algoritmo de Prim.

   (b) Ver Figura 2.



(a) It 0 (b) It 1 (c) It 2 (d) It 3

Figura 2: Resolução pelo Algoritmo de Kruskal.

   (c) As duas únicas árvores geradoras mínimas estão representadas nas Figuras 1(d) e 2(d), respectivamente.

   (d) Seja $H = (V, T)$ a árvore geradora mínima (de um grafo $G = (V, E)$) encontrada pelo Algoritmo de Kruskal. Suponhamos, por absurdo, que existe uma outra árvore geradora mínima, denotada $H' = (V, T')$, distinta de $H$.

   Seja $e$ a primeira aresta analisada durante o algoritmo de Kruskal que é inserida em $H$ mas não em $H'$. O grafo $H'/\ e$ contém um único ciclo $C$. Para cada aresta $f$ de $C \setminus e$, deverá ter-se $c_f > c_e$ pois caso contrário ter-se-ia $c_f < c_e$ (porquê?) e o grafo $H \setminus e/\ f$ seria uma árvore geradora com custo inferior ao de $H$, o que é absurdo pois $H$ é árvore geradora mínima.

   Seja $f$ uma qualquer aresta de $C \setminus e$. O grafo $H' \setminus f/\ e$ é ainda uma árvore geradora e, atendendo a que $c_f > c_e$, tem peso inferior ao de $H'$. Chegamos a um absurdo pois $H'$ é árvore geradora mínima.

■

2. Seja $G = (V, E)$ um digrafo com custos $c$ nos arcos. Para cada $v \in V$, dispõe de um dicaminho-$(r, v)$ com custo $y_v$. Mostre que, se existir um escalar positivo $\delta$ tal que

$$y_v + c_{vw} \geq y_w - \delta, \qquad \text{para todo } vw \in E,$$

então $y_v - y_v^* \leq n\delta$ sendo $y_v^*$ o custo mínimo de um dicaminho-$(r, v)$.

*Solução:* Seja $P \equiv v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$, para $v_0 \equiv r$ e $v_k \equiv v$, o mais curto dicaminho-$(r, v)$. Então,

$$y_v^* = c(P) = \sum_{i=1}^{k} c_{e_i} \geq \sum_{i=1}^{k} \left(y_{v_i} - y_{v_{i-1}} - \delta\right) = y_v - y_r - k\delta \geq y_v - (n-1)\delta \geq y_v - n\delta.$$

■

3. Seja $G = (V, E)$ o digrafo da Figura 3. Os números junto dos arcos representam capacidades $u$ nos arcos. Seja $A$ a matriz de incidência vértice-arco de $G$ e seja $b = (-1, -1, -6, 5, 3)$ um vector de requerimentos nos vértices.

   (a) Explicite $A$ e diga qual é a sua característica.

   (b) Mostre é possível obter um vector $\bar{x}$ no conjunto $P \equiv \{x\colon Ax = b, 0 \leq x \leq u\}$ através da resolução de um adequado problema de fluxo máximo. Obtenha-o através do algoritmo do caminho incremental.

   (c) Mostre que $\bar{x}$ encontrado na alínea anterior é ponto extremo de $P$.

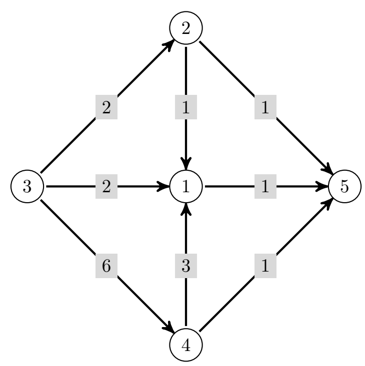



Figura 3:

*Solução:*

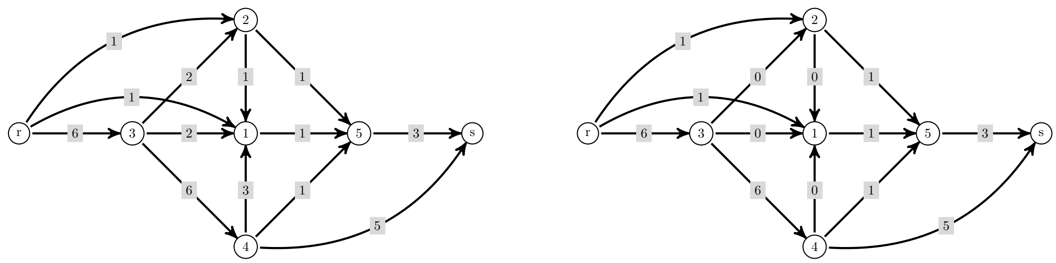
   (a) A característica da matriz $A$, abaixo, é quatro porque é igual ao número de vértices menos o número de componentes,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (b) Começamos por ampliar o digrafo dado com mais dois vértices, ($r$ e $s$), arcos de $r$ para os vértices *dadores* (1, 2 e 3) e e arcos dos vértices recebedores (4 e 5) para $s$. As capacidades dos novos arcos são o valor absoluto dos respectivos requerimentos. O digrafo resultante encontra-se na Figura 4(a). Os números junto aos arcos são as capacidades dos arcos.

   Depois, obtemos o fluxo-$(r, s)$ máximo através do algoritmo do caminho incremental. Os números junto dos arcos no digrafo da Figura 4(b) são o fluxo atravessando cada arco.

   Como o valor do fluxo máximo encontrado é 8 então $\bar{x} = (0, 0, 6, 0, 0, 1, 1, 1) \in P$.



(a) (b)

Figura 4:

(c) Em $\bar{x}$ todas as componentes estão no limite inferior ou superior. Como $\bar{x}$ é admissível então tem que ser ponto extremo porque não há maneira de o escrever como combinação convexa de outros dois pontos de $P$.

■

4. Dado um conjunto $N$ de localizações de refinarias e um conjunto $M$ de localizações de bombas de gasolina considere o problema de planear a distribuição de gasolina desde as refinarias até àqueles postos de venda directa. Existe um custo fixo $f_j$ associado ao recurso à refinaria $j$ e um custo de transporte $c_{ij}$ proporcional à proporção de gasolina a enviar da refinaria $j$ para a bomba de gasolina $i$. Formule o problema descrito.