Optimização Combinatória Exame (época normal)
Universidade de Coimbra 5 páginas
Professor João Soares 23 de Junho de 2008

---

1. Seja G um grafo com custos nas arestas e H uma árvora geradora mínima.

a. Mostre que, se e é uma aresta de $G \setminus H$ então H permanece árvore geradora mínima quando substituímos c_e por um valor superior.

b. Obtenha a árvore geradora de peso mínimo para o grafo da Figura 1 em função de $x \in \mathbb{R}$.

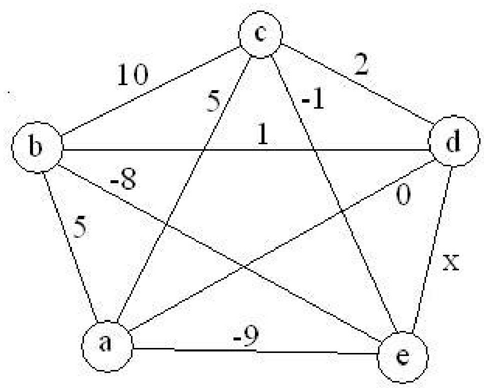


Figura 1: Um grafo com custos nas arestas.

2. Considere o digrafo da Figura 2.

a. Obtenha o mais curto dicaminho-(r, q). Que algoritmo usou e porquê?

b. Formule o problema anterior como um problema linear $\min\{cx \colon Ax = b, x \geq 0\}$ e identifique a base óptima.

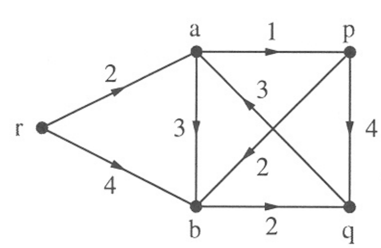


Figura 2: Um digrafo com distâncias nos arcos.

3. Considere um problema de afectação definido pela seguinte matriz de custos:

$$(c_{ij}) = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 9 & 2 & 7 & 6 & 0 \\ 8 & 2 & 1 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 9 & 1 \end{bmatrix}.$$

a. Para $u = (1, 0, -1, 0, 1)$ e $v = (2, 1, 2, 2, 0)$ obtenha a matriz dos custos reduzidos $(c_{ij} - u_i - v_j)$ e conclua que (u, v) é dual-admissível.

b. Resolva esse problema de afectação. (faça uma iteração apenas)

Solução: A matriz dos custos reduzidos é

$$(c_{ij} - u_i - v_j) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 5 & 4 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix},$$

pelo que (u, v) é dual-admissível. O grafo $G = (V, E')$ é o da Figura 4. As arestas a negrito do

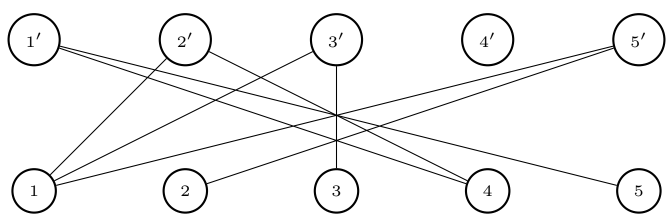


Figura 3:

grafo da Figura 4 definem o último emparelhamento encontrado através do algoritmo estudado nas aulas. Na mesma figura assinala-se o conjunto dos vértices rotulados, nomeadamente, o conjunto

$$L = (V_1 \cap L) \cup (V_2 \cap L) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{1', 2', 3', 5'\}.$$

Então, a solução dual (u, v) será actualizada usando

$$\Delta = \min\{w_{ij} : i \in V_1 \cap L = \{1, 2, 3, 4, 5\}, j \in V_2 \setminus L = \{4'\}\} = 1,$$

através de

$$u_i := u_i + \Delta, i \in V_1 \cap L = \{\}, \qquad v_j := v_j - \Delta, j \in V_2 \cap L = \{1', 2', 3', 5'\}.$$

Portanto,

$$u := (1, 0, -1, 0, 1), \qquad v := (1, 0, 1, 2, -1).$$

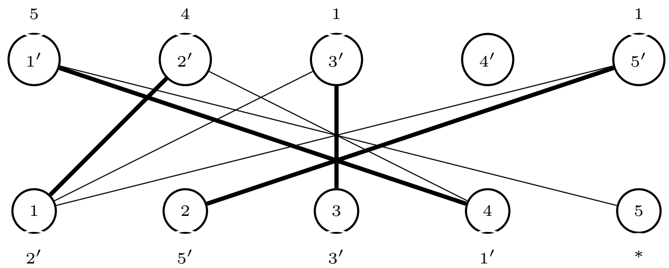


Figura 4: Emparelhamento de máxima cardinalidade para o grafo da Figura 3.

A nova matriz dos custos reduzidos é

$$(c_{ij} - u_i - v_j) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 5 & 3 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix},$$

pelo que (u, v) é dual-admissível. O grafo $G = (V, E')$ é o da Figura 5. Na Figura 6 assinala-se a

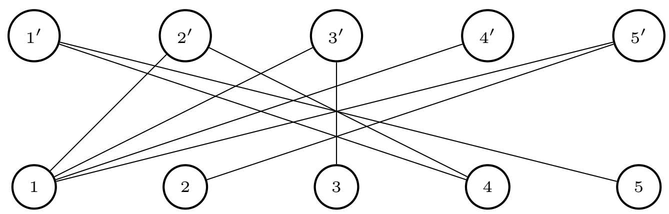


Figura 5:

negrito um emparelhamento perfeito. Concluímos que o emparelhamento perfeito de peso mínimo,

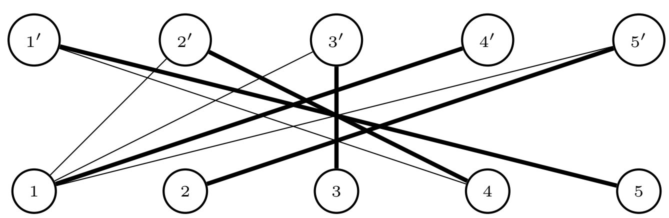


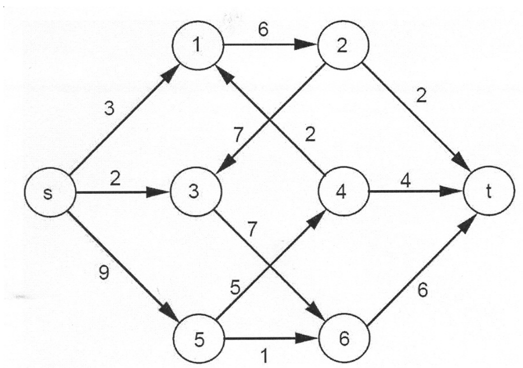
Figura 6: Emparelhamento de máxima cardinalidade para o grafo da Figura 4.

assinalado na Figura 6, tem peso 4. ■

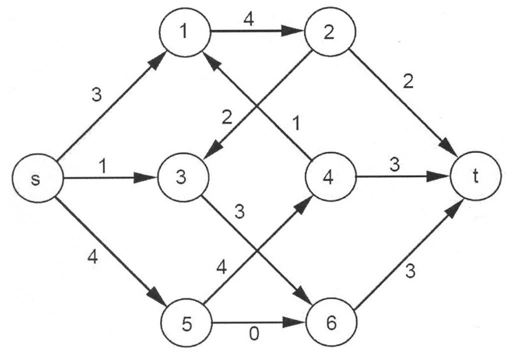
4. Seja $G = (V, E)$ o digrafo da Figura 7(a). Os números junto a cada arco representam capacidades. O mesmo digrafo está representado na Figura 7(b) mas agora os números representam um fluxo-(s, t) admissível.

a. Esboce o digrafo residual e encontre um dicaminho-(s,t) nesse digrafo.

b. Encontre o fluxo-(s,t) máximo e mostre que é, de facto, máximo.



(a) Um digrafo com capacidades nos arcos.



(b) Um fluxo-(s,t) admissível.

Figura 7:

5. Seja $G = (V, E)$ um grafo e seja M um emparelhamento em G.

a. Enuncie uma condição necessária e suficiente para que M seja de máxima cardinalidade.

b. Mostre que existe um emparelhamento de máxima cardinalidade M' tal que todo o vértice coberto por M também é coberto por M'.

Solução:

a. **Teorema de Berge**: *Seja $G = (V, E)$ um grafo e seja M um emparelhamento de G. Se P é um caminho aumentante relativamente a M então*[1]

$$M \Delta E(P) \equiv (M \cup E(P)) \setminus (M \cap E(P)) \tag{1}$$

é um emparelhamento com mais uma aresta do que M; se não existe caminho aumentante relativamente a M então M é um emparelhamento de máxima cardinalidade.

b. Seja M' um qualquer emparelhamento de máxima cardinalidade e seja S o conjunto dos vértice cobertos por M que não são cobertos por M'. Se S é vazio então M' serve o resultado pretendido. Por isso, suponhamos que S é não vazio.

Seja $v \in S$ e seja $F = M \Delta M'$. Como M e M' são emparelhamentos, todo o vértice possui no máximo uma aresta incidente em cada um daqueles conjuntos de arestas. Por isso, todo o vértice possui no máximo duas arestas de F que lhe são incidentes. Consequentemente, cada componente do grafo $G' = (V, F)$ é um caminho ou um ciclo. Por isso, v é extremidade de um caminho P em G'. Todos os restantes vértices desse caminho P são cobertos por M'

[1] O operador 'Δ' é normalmente designado 'diferença simétrica'.

(caso contrário, M' não seria de máxima cardinalidade) e a outra extremidade de P não pertence a S.

Consideremos o emparelhamento $M'' = M' \Delta E(P)$. Este novo emparelhamento é ainda de máxima cardinalidade porque $|M''| = |M'|$ e $S(M, M'') = S(M, M') \setminus \{v\}$. Repetimos este procedimento com M'' no lugar de M' até que $S(M, M') = \emptyset$.

$\blacksquare$