Optimização Combinatória Primeira frequência
Universidade de Coimbra 1 página
Professor João Soares 1 de Abril de 2009

---

1. Seja $G = (V, E)$ um ciclo com quatro vértices a, b, c, d e com arestas ab, bc, cd, ad de pesos $1, 3, 2, 3$, respectivamente.

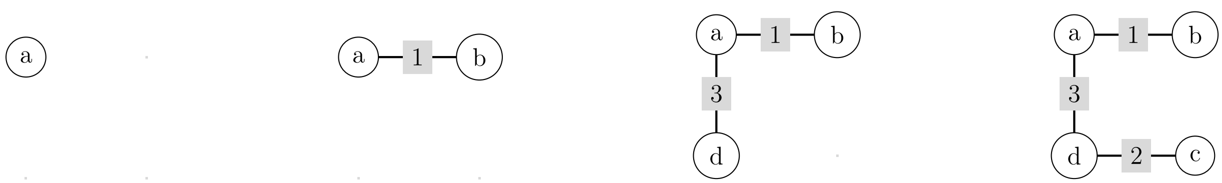
   (a) Identifique a sequência de florestas encontradas durante o Algoritmo de Prim para calcular a árvore geradora de peso mínimo (em G). **(1.5 val)**

   (b) Identifique a sequência de florestas encontradas durante o Algoritmo de Kruskal para calcular a árvore geradora de peso mínimo (em G). **(1.5 val)**

   (c) Prove que, num grafo conexo no qual os pesos das arestas são todos distintos, a árvore geradora mínima é única. **(1 val)**

Solução:

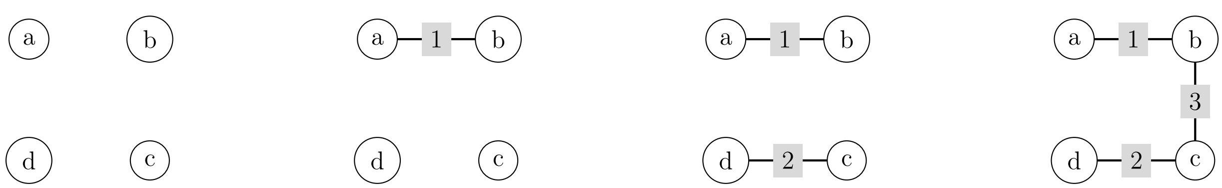
(a) Qualquer vértice serve para dar início ao algoritmo. Ver Figura 1.



(a) It 0 (b) It 1 (c) It 2 (d) It 3

Figura 1: Resolução pelo Algoritmo de Prim.

(b) Ver Figura 2.



(a) It 0 (b) It 1 (c) It 2 (d) It 3

Figura 2: Resolução pelo Algoritmo de Kruskal.

(c) Admita-se, por absurdo, a existência de duas árvores geradoras mínimas distintas, $H = (V, T)$ e $H' = (V, T')$. Seja $e \equiv vw \in T \backslash T'$ e seja S o conjunto de vértices da componente de $H \backslash e$ que contém o vértice v.

Como H' é árvore geradora, existe pelo menos uma aresta $f \in \delta_{H'}(S)$. Obviamente, todas essas arestas são distintas de e porque $e \notin T'$. Para toda a aresta $f \in \delta_{H'}(S)$, o grafo $H\backslash e/f$ é conexo e tem $n-1$ arestas. Por isso, $H\backslash e/f$ é árvore geradora. Como H é mínima então,

$$c_f \geq c_e, \qquad \text{para todo } f \in \delta_{H'}(S). \tag{1}$$

Agora, consideremos o grafo H'/e e, mais precisamente, o seu único ciclo C (que inclui a aresta e, entre outras). Uma das arestas de C deve pertencer a $\delta_{H'}(S)$ porque $v \in S$ e $w \notin S$ existe um caminho-(v,w) em H'. Seja f uma dessas arestas. Como $H'\backslash f/e$ é árvore geradora e H' é mínima então

$$c_f \leq c_e.$$

Atendendo a (1), concluímos que $c_f = c_e$ chegando a um absurdo.

■

(2 val) 2. Seja $G = (V,E)$ um digrafo com custos c nos arcos. Para cada $v \in V$, dispõe de um dicaminho-(r,v) com custo y_v. Mostre que, se existir um escalar positivo δ tal que

$$y_v + c_{vw} \geq y_w - \delta, \qquad \text{para todo } vw \in E,$$

então $y_v - y_v^* \leq n\delta$ sendo y_v^* o custo mínimo de um dicaminho-(r,v).

Solução: Seja v um vértice arbitrário e seja P o mais curto dicaminho-(r,v). Sem perda de generalidade,

$$P \equiv \; v_0 \; (v_0,v_1) \; v_1 \ldots \; v_{k-1} \; (v_{k-1},v_k) \; v_k,$$

onde $v_0 \equiv r$ e $v_k \equiv v$. Então,

$$\begin{aligned} y_v^* &= c(P) \\ &= \sum_{i=1}^{k} c_{v_{i-1}v_i} \\ &\geq \sum_{i=1}^{k} \left(y_{v_i} - y_{v_{i-1}} - \delta\right) \\ &= (y_{v_1} - y_{v_0} - \delta) + (y_{v_2} - y_{v_1} - \delta) + \ldots + \left(y_{v_k} - y_{v_{k-1}} - \delta\right) \\ &= y_v - y_{v_0} - k\delta. \end{aligned}$$

Note-se que, por hipótese, $y_{v_0} = 0$ porque só existe um dicaminho-(r,r), que tem custo zero. Por isso,

$$y_v^* \geq y_v - k\delta \geq y_v - n\delta,$$

como se pretendia demonstrar. ■

3. Seja $G = (V,E)$ o digrafo da Figura 3. Os números junto dos arcos representam capacidades u nos arcos. Seja A a matriz de incidência vértice-arco de G e seja $b = (-1,-1,-6,5,3)$ um vector de requerimentos nos vértices.

(1 val) (a) Explicite A e diga qual é a sua característica.

(1 val) (b) Mostre que é possível obter um vector $\bar{x}$ no conjunto $P \equiv \{x \colon Ax = b, 0 \leq x \leq u\}$ através da resolução de um adequado problema de fluxo máximo. Obtenha-o através do algoritmo do caminho incremental.

(1 val) (c) Mostre que $\bar{x}$ encontrado na alínea anterior é ponto extremo de P.

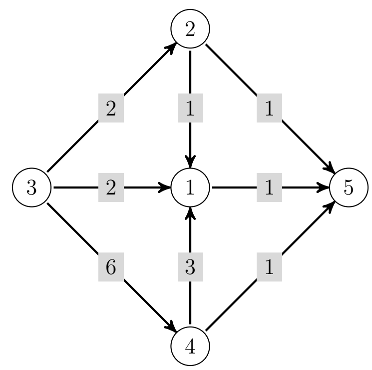


Figura 3:

Solução:

(a) A característica da matriz A, abaixo, é quatro porque é igual ao número de vértices menos o número de componentes,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

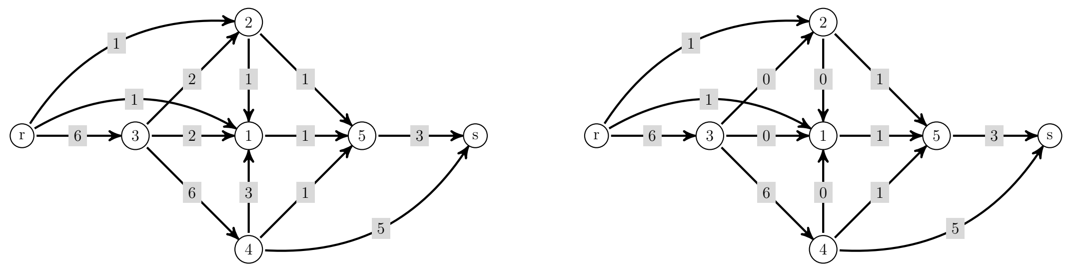
(b) Começamos por ampliar o digrafo dado com mais dois vértices, (r e s), arcos de r para os vértices *dadores* (1, 2 e 3) e arcos dos vértices recebedores (4 e 5) para s. As capacidades dos novos arcos são o valor absoluto dos respectivos requerimentos. O digrafo resultante encontra-se na Figura 4(a). Os números junto aos arcos são as capacidades dos arcos.

Depois, obtemos o fluxo-(r, s) máximo através do algoritmo do caminho incremental. Os números junto dos arcos no digrafo da Figura 4(b) são o fluxo atravessando cada arco.

Como o valor do fluxo máximo encontrado é 8 então $\bar{x} = (0, 0, 6, 0, 0, 1, 1, 1) \in P$.

(c) Em $\bar{x}$ todas as componentes estão no limite inferior ou superior. Como $\bar{x}$ é admissível então tem que ser ponto extremo porque não há maneira de o escrever como combinação convexa de outros dois pontos de P.

∎



(a) (b)

Figura 4:

4. Dado um conjunto N de localizações de refinarias e um conjunto M de localizações de bombas de gasolina considere o problema de planear a distribuição de gasolina desde as refinarias até àqueles postos de venda directa. Existe um custo fixo f_j associado ao recurso à refinaria j e um custo de transporte c_{ij} proporcional à proporção de gasolina a enviar da refinaria j para a bomba de gasolina i. Formule o problema descrito. **(2 val)**

Solução:

$$\left.\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{i\in M}\sum_{j\in N} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j\in J} f_j y_j & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i\in I} x_{ij} = 1, & j \in J \\
 & x_{ij} \leq y_j, & i \in I, j \in J \\
 & x_{ij} \geq 0, & i \in I, j \in J \\
 & y_j \in \{0,1\}, & j \in J
\end{array}\right\}$$

■