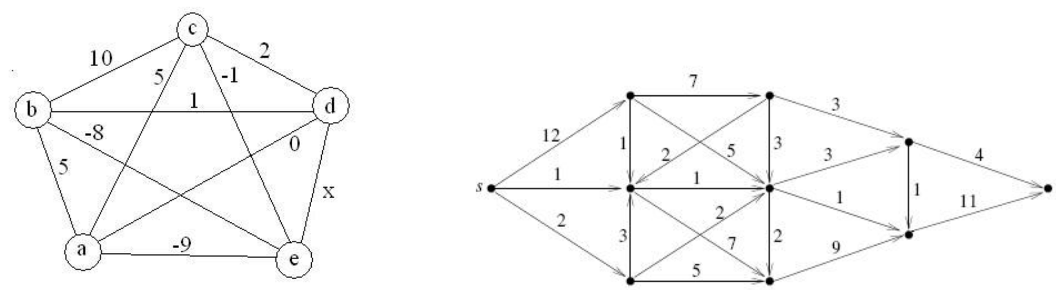
Optimização Combinatória Exame (época especial)
Universidade de Coimbra 2 páginas
Professor João Soares 3 de Setembro de 2009

---

1. Seja G um grafo com custos, não necessariamente todos não negativos, nas arestas e considere o problema de encontrar a floresta (de G) que tem custo mínimo.

a. Defina floresta e explique porque é que, sem perda de generalidade, podemos simplesmente ignorar as arestas de custo não positivo.

b. Obtenha a floresta de peso mínimo para o grafo da Figura 1(a) em função de x, o custo da aresta de.



(a) (b)

Figura 1:

2. Considere o digrafo da Figura 1(b). Junto a cada arco encontra-se uma medida de distância.

a. Obtenha um ordenamento topológico dos vértices.

b. Obtenha o mais curto dicaminho-(s, t) usando o conhecimento da alínea anterior.

3. Considere o digrafo da Figura 1(b). Junto a cada arco encontra-se a sua capacidade.

a. Obtenha um fluxo-(s, t) admissível de valor 14.

b. Obtenha o corte-(s, t) mínimo através do algoritmo do caminho incremental.

4. Seja $G = (V, E)$ um grafo com custo $c_e \geq 0$ em cada $e \in E$. Dado um conjunto $U \subseteq V$, uma árvore de Steiner sobre U é um subgrafo de G que é árvore (portanto, conexo e acíclico) e no qual existe um caminho entre qualquer par de vértices em U. Formule algebricamente o problema de determinar a árvore de Steiner sobre U que tem custo mínimo.

5. Considere o grafo bipartido da Figura 2

a. Encontre um emparelhamento de cardinalidade máxima através do algoritmo estudado nas aulas.

b. Encontre uma cobertura por nós de cardinalidade mínima através do mesmo algoritmo.

c. Defina um grafo conexo que não seja bipartido e no qual o emparelhamento de cardinalidade máxima e a cobertura por nós de cardinalidade mínima são conjuntos com a mesma cardinalidade.

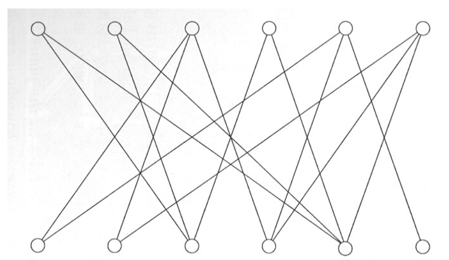


Figura 2: Um grafo bipartido.

6. Uma função $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diz-se superaditiva se $F(a)+F(b) \leq F(a+b)$, para todo $a, b \in \mathbb{R}^m$.

a. Mostre que, se $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ for superaditiva, não decrescente e tal que $F(0) = 0$ então, para todo o $x \in X = \{x \in \mathbb{Z}^n_+ \colon Ax \leq b\}$, sendo $A = [a_1 a_2 \dots a_n] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, tem-se

$$\sum_{j=1}^{n} F(a_j)x_j \leq \sum_{j=1}^{n} F(a_j x_j) \leq F(Ax) \leq F(b),$$

e conclua que $\sum_{j=1}^{n} F(a_j)x_j \leq F(b)$ é uma desigualdade válida para X.

b. Seja $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definida por $F(d) = \lfloor d_1 \rfloor$, onde d_1 designa a primeira componente do vector d. Mostre que F está nas condições da alínea anterior e apresente um exemplo de uma desigualdade válida que é possível de obter com base nesta ideia.