Optimização Combinatória Exame (época normal)
Universidade de Coimbra 2 páginas
Professor João Soares 17 de Junho de 2009

1. Seja $G = (V, E)$ um grafo e sejam $H = (V, T)$ e $H' = (V, T')$ duas árvores geradoras distintas. Mostre que, para todo $e \in T \backslash T'$ existe $f \in T' \backslash T$ tal que $H \backslash e / f$ é árvore geradora.

2. Considere o digrafo da Figura 1. Junto a cada arco encontra-se uma medida de distância.

a. Obtenha um ordenamento topológico dos vértices.

b. Obtenha o mais curto dicaminho-(s, t) usando o conhecimento da alínea anterior.

3. Considere o digrafo da Figura 1. Junto a cada arco encontra-se a sua capacidade.

a. Obtenha um fluxo-(s, t) admissível de valor 14.

b. Obtenha o corte-(s, t) mínimo através do algoritmo do caminho incremental.

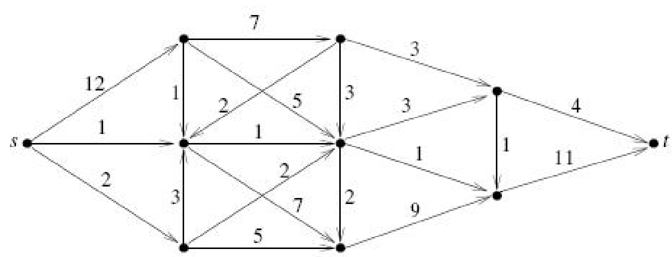

Figura 1:

4. Dado um conjunto N de localizações de refinarias e um conjunto M de localizações de bombas de gasolina considere o problema de planear a distribuição de gasolina desde as refinarias até àqueles postos de venda directa. Existe um custo fixo f_j associado ao recurso à refinaria j e um custo de transporte c_{ij} proporcional à proporção de gasolina a enviar da refinaria j para a bomba de gasolina i. Formule o problema descrito.

5. Considere o grafo bipartido da Figura 2

a. Encontre um emparelhamento de cardinalidade máxima através do algoritmo estudado nas aulas.

b. Encontre uma cobertura por nós de cardinalidade mínima através do mesmo algoritmo.

c. Defina um grafo conexo que não seja bipartido e no qual o emparelhamento de cardinalidade máxima e a cobertura por nós de cardinalidade mínima são conjuntos com a mesma cardinalidade.

d. Defina um grafo conexo com um número par de arestas e no qual o emparelhamento de cardinalidade máxima e a cobertura por nós de cardinalidade mínima são conjuntos com cardinalidade distinta.

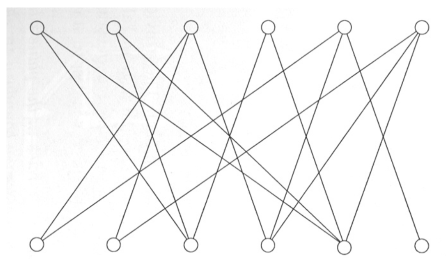

Figura 2: Um grafo bipartido.

6. Uma função $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diz-se superaditiva se $F(a)+F(b) \leq F(a+b)$, para todo $a, b \in \mathbb{R}^m$.

a. Mostre que, se $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ for superaditiva, não decrescente e tal que $F(0) = 0$ então, para todo o $x \in X = \{x \in \mathbb{Z}^n_+ \colon Ax \leq b\}$, sendo $A = [a_1 a_2 \ldots a_n] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, tem-se

$$\sum_{j=1}^{n} F(a_j)x_j \leq \sum_{j=1}^{n} F(a_j x_j) \leq F(Ax) \leq F(b),$$

e conclua que $\sum_{j=1}^{n} F(a_j)x_j \leq F(b)$ é uma desigualdade válida para X.

b. Seja $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definida por $F(d) = \lfloor d_1 \rfloor$, onde d_1 designa a primeira componente do vector d. Mostre que F está nas condições da alínea anterior e apresente um exemplo de uma desigualdade válida que é possível de obter com base nesta ideia.