

1. Seja  $G = (V, E)$  um digrafo com capacidades nos arcos. Um utilizador pretende enviar  $f$  unidades de fluxo a partir do vértice  $r$  e destinados ao vértice  $s$ . A capacidade de um arco genérico  $ij$  é  $u_{ij}$ , e custa ao utilizador  $c_{ij}$  euros caso esse arco seja efectivamente atravessado por fluxo. Formule o problema de como distribuir aquela quantidade de fluxo pelo digrafo, de forma a minimizar o custo total com aquisição de capacidade.

Como modelaria a possibilidade de haver capacidades alternativas (com custos distintos) para cada arco?

*Note que este problema é muito parecido com o do fluxo máximo. Se não consegue abordar esta questão então, em alternativa, resolva:*

Uma biblioteca possui um orçamento anual de  $b$  euros para subscrever revistas científicas. O custo de subscrição anual da revista científica  $j$  é  $a_j$  euros e possui uma utilidade  $c_j$ . Formule o problema de saber quais revistas deve a biblioteca subscrever de forma a obter uma utilidade global máxima.

*Solução:* A formulação pedida incorpora elementos da formulação do problema do fluxo máximo e da formulação do exercício **(F:12)** do tpc1. Associe-se duas variáveis de decisão  $x_e$  e  $y_e$  a cada arco  $e$  com a seguinte interpretação:

$x_e$  é a quantidade de fluxo que atravessa o arco  $e$ ;

$y_e$  é uma variável binária que indica se a capacidade  $u_e$  foi adquirida (se igual a 1) ou não (se igual a 0).

Então, a formulação pedida é o problema de minimizar a função

$$\sum_{e \in E} c_e y_e$$

sujeita às restrições

$$\sum_{e \in \delta^-(v)} x_e - \sum_{e \in \delta^+(v)} x_e = \begin{cases} -f & \text{se } v = r \\ 0 & \text{se } v \neq r, s \\ f & \text{se } v = s \end{cases} \quad \text{para cada } v \in V, \quad (1a)$$

$$0 \leq x_e \leq u_e y_e \quad \text{para cada } e \in E, \quad (1b)$$

$$0 \leq y_e \leq 1, \quad \text{para cada } e \in E, \quad (1c)$$

$$y_e \in \mathbb{Z}, \quad \text{para cada } e \in E. \quad (1d)$$

Para acomodar  $k(e)$  capacidades alternativas num dado arco  $e$  basta considerar que em  $G$  existem  $k(e)$  arcos paralelos  $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(k(e))}$  e a mesma formulação serviria acrescida da restrição

$$\sum_{k=1}^{k(e)} y_{e^k} \leq 1,$$

reflectindo a, eventual, restrição de uma única capacidade possível numa dada ligação entre vértices.

Para formular o exercício alternativo considera-se uma variável de decisão  $x_j$  para cada revista científica  $j$  com a seguinte interpretação:

$x_j$  é uma variável binária que indica se revista científica  $j$  deve ser subscrita pela biblioteca (se igual a 1) ou não (se igual a 0).

Então, a formulação pedida é o problema de maximizar a função

$$\sum_j c_j x_j$$

sujeita às restrições

$$\sum_j a_j x_j \leq b, \tag{2a}$$

$$0 \leq x_j \leq 1 \tag{2b}$$

$$x_j \in \mathbb{Z}, \tag{2c}$$

■

2. Considere o digrafo  $G = (V, E)$  com distâncias nos arcos da Figura 1.

- Obtenha a árvore dos dicaminhos- $(r, \cdot)$  mais curtos através do Algoritmo de Ford inicializado com o subgrafo gerador  $H$  que é constituído pelos arcos  $ra, rb, rc, ad, dg, be, cf, eh$  e  $gs$ .
- Obtenha uma ordenação topológica dos vértices de  $G$  e conclua, justificando, que  $G$  não tem diciclos.

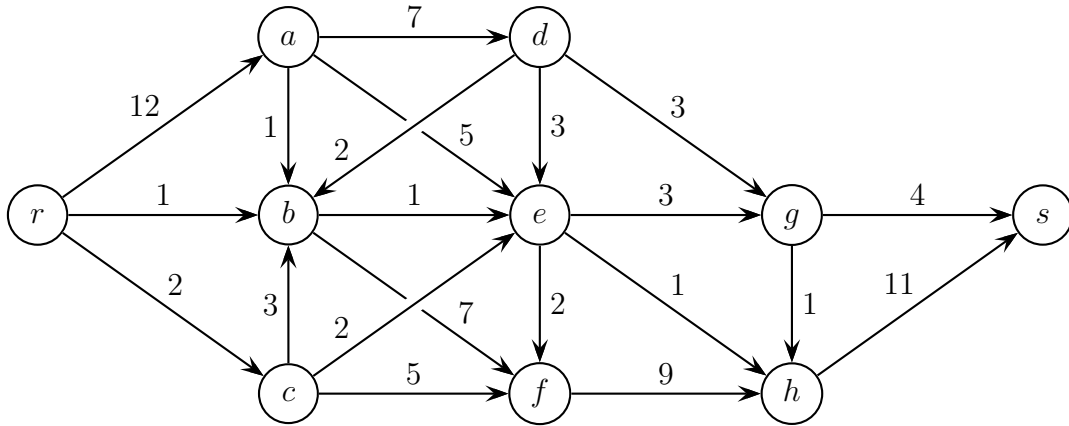


Figura 1:

*Solução:*

- A árvore  $H = (V; T)$  está representada a vermelho na Figura 2. Tal como se sugere no exercício **(CMC:12)** do tpc3 podemos inicializar o Algoritmo de Ford do modo que se exhibe na Tabela 1. Conforme descrito nessa tabela, após três correções, o algoritmo de Ford termina. A árvore dos dicaminhos- $(s, \cdot)$  mais curtos está exibida a vermelho na Figura 3.
- Uma ordenação topológica dos vértices é a seguinte:

$$r \ a \ d \ c \ b \ e \ f \ g \ h \ s$$

Resenhando o digrafo colocando os vértices por esta ordem numa linha observamos que todos os arcos possuem o vértice inicial à esquerda do vértice terminal. Portanto, não pode haver diciclos.

■

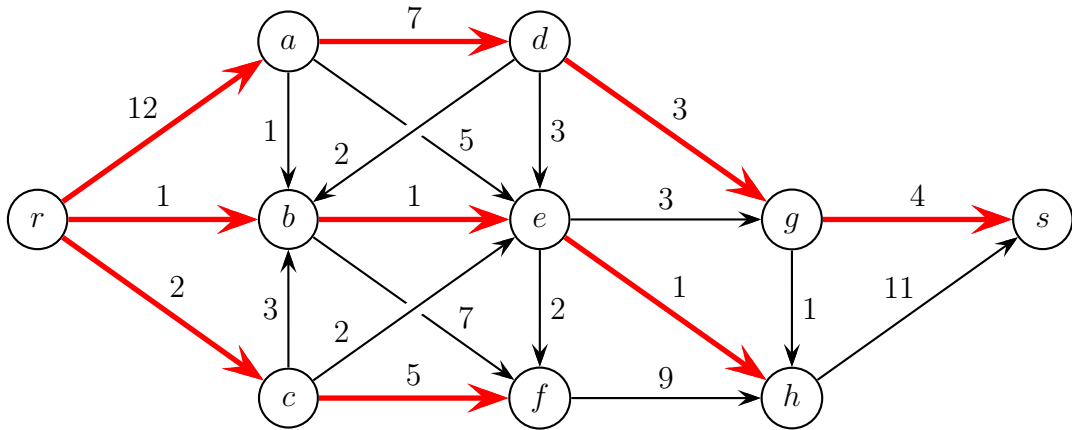


Figura 2:

	Início		$vw = eg$		$vw = gs$		$vw = ef$	
	$y$	$p$	$y$	$p$	$y$	$p$	$y$	$p$
$r$	0	0	0	0	0	0	0	0
$a$	12	$r$	12	$r$	12	$r$	12	$r$
$b$	1	$r$	1	$r$	1	$r$	1	$r$
$c$	2	$r$	2	$r$	2	$r$	2	$r$
$d$	19	$a$	19	$a$	19	$a$	19	$a$
$e$	2	$b$	2	$b$	2	$b$	2	$b$
$f$	7	$c$	7	$c$	7	$c$	4	$e$
$g$	21	$d$	5	$e$	5	$e$	5	$e$
$h$	3	$e$	3	$e$	3	$e$	3	$e$
$s$	26	$g$	26	$g$	9	$g$	9	$g$

Tabela 1:

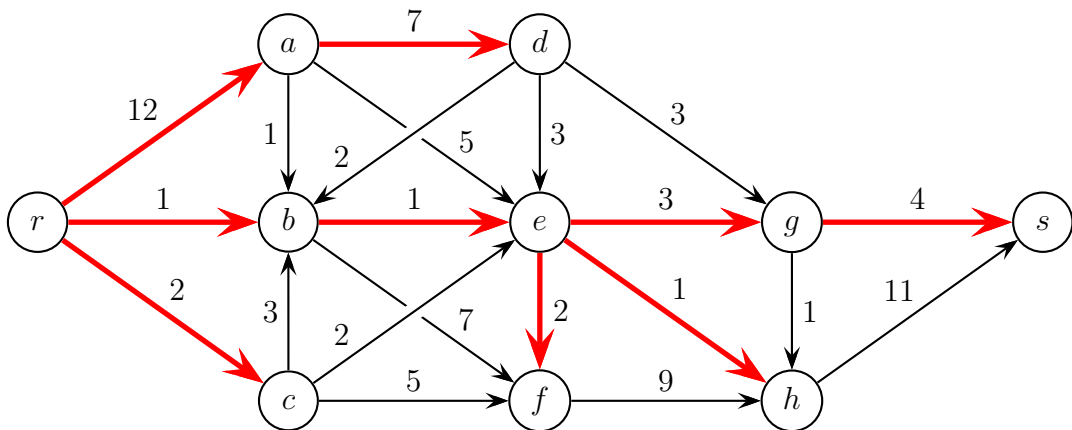


Figura 3:

3. Seja  $G = (V, E)$  o grafo com pesos nas arestas da Figura 4.

- Obtenha a árvore geradora de peso mínimo e a floresta geradora de peso mínimo.
- Acrescente a  $G$  uma aresta  $de$  com peso  $x \in \mathbb{R}$ . Obtenha a árvore geradora de peso mínimo e a floresta geradora de peso mínimo no novo grafo em função de  $x$ .

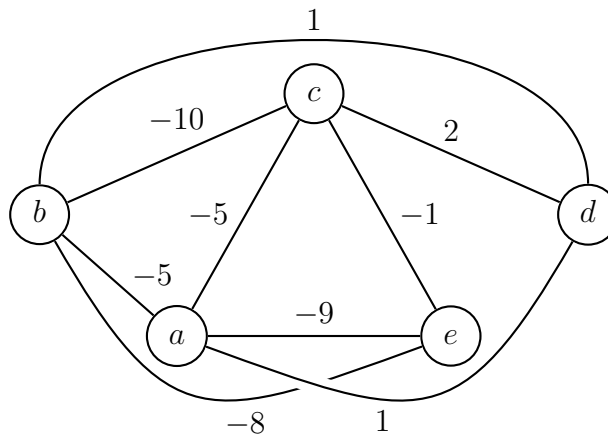


Figura 4:

*Solução:*

- A árvore geradora mínima está exibida a vermelho na Figura 5. Foi obtida com um dos algoritmos de Prim ou de Kruskal. A floresta geradora mínima está exibida a vermelho na Figura 6. A sua obtenção foi discutida no exercício **(AGM:16)** do tpc2.
- Na árvore geradora mínima existe um único caminho- $(d, e)$ . Neste caminho a aresta de maior custo é a aresta  $bd$  que tem custo 1. Por isso, se  $x \geq 1$  aquela árvore geradora continua mínima. Para  $x < 1$ , a árvore geradora mínima decorre de uma troca da aresta  $bd$  com a aresta  $de$ , que se ilustra a vermelho na Figura 7.

No caso da floresta geradora mínima, se  $x \geq 0$  aquela floresta geradora continua mínima. Se  $x < 0$ , a floresta geradora mínima decorre de inserir a aresta  $de$ , que se ilustra a vermelho na Figura 7.

■

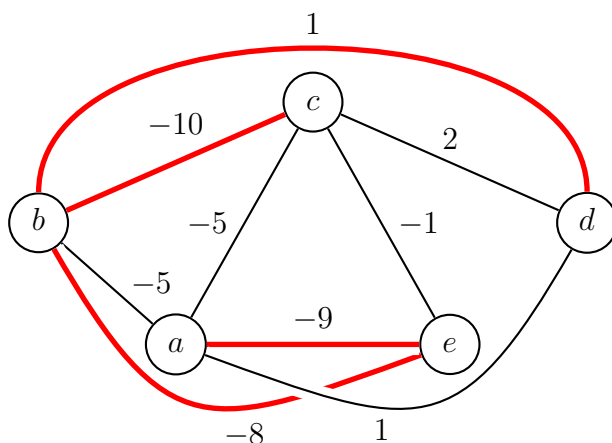


Figura 5:

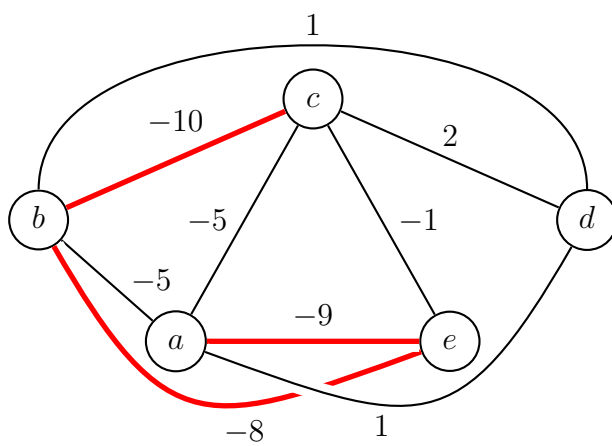


Figura 6:

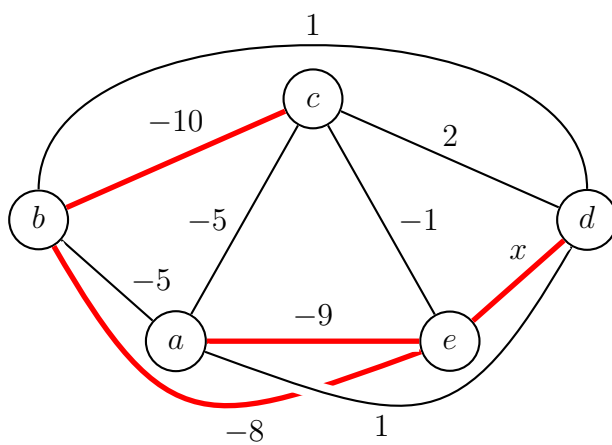


Figura 7:

4. Considere o digrafo  $G = (V, E)$  da Figura 8 onde os números junto dos arcos representam capacidades mínimas  $l$  e máximas  $u$  de travessia de fluxo. Pretende-se enviar a maior quantidade de fluxo possível do vértice  $r$  para o vértice  $s$  respeitando aquelas capacidades.

- a. Seja  $x$  um fluxo admissível neste digrafo  $G$  e seja  $R$  um subconjunto dos vértices tal que  $r \in R \subseteq V \setminus \{s\}$ . Mostre que,

$$x(\delta^-(s)) - x(\delta^+(s)) \leq u(\delta^+(R)) - l(\delta^-(R)).$$

- b. O seguinte fluxo- $(r, s)$  é admissível para o digrafo da Figura 8,  $x_{ra} = 6$ ,  $x_{rc} = 1$ ,  $x_{ab} = 4$ ,  $x_{cd} = 1$ ,  $x_{ad} = 2$ ,  $x_{bd} = 2$ ,  $x_{bs} = 2$ ,  $x_{ds} = 5$ ; mas não é solução óptima para o problema descrito. Encontre-a.

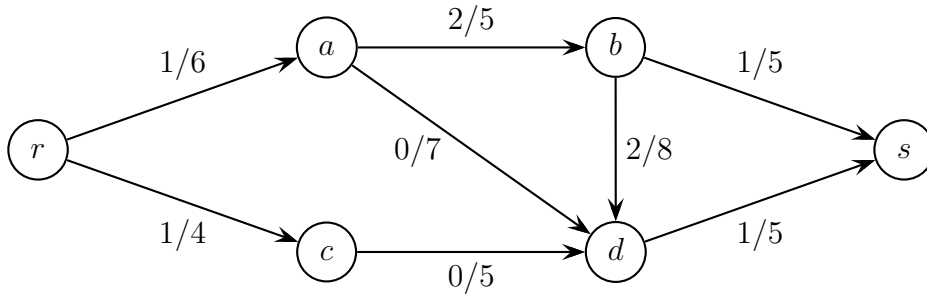


Figura 8:

*Solução:*

- a. Este exercício pressupõe a compreensão da demonstração da Proposição 2 do texto de apoio Fluxos e Cortes. Primeiro, note-se que neste contexto, um fluxo- $(r, s)$  admissível é um vector  $x$  que satisfaz

$$\sum_{e \in \delta^-(v)} x_e - \sum_{e \in \delta^+(v)} x_e = 0, \quad \text{para todo } v \in V \text{ tal que } r \neq v \neq s, \quad (3a)$$

$$l_e \leq x_e \leq u_e, \quad \text{para todo } e \in E. \quad (3b)$$

Devido aos cancelamentos, se  $x$  é um fluxo- $(r, s)$  então

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{v \in V} \left( \sum_{e \in \delta^-(v)} x_e - \sum_{e \in \delta^+(v)} x_e \right) \\ &= \left( \sum_{e \in \delta^-(r)} x_e - \sum_{e \in \delta^+(r)} x_e \right) + \sum_{v \in V \setminus \{r, s\}} \left( \sum_{e \in \delta^-(v)} x_e - \sum_{e \in \delta^+(v)} x_e \right) + \left( \sum_{e \in \delta^-(s)} x_e - \sum_{e \in \delta^+(s)} x_e \right) \\ &= \left( \sum_{e \in \delta^-(r)} x_e - \sum_{e \in \delta^+(r)} x_e \right) + \left( \sum_{e \in \delta^-(s)} x_e - \sum_{e \in \delta^+(s)} x_e \right). \end{aligned}$$

Por isso, sendo  $x$  um fluxo- $(r, s)$  admissível  $R$  um subconjunto dos vértices tal que  $r \in R \subseteq V \setminus \{s\}$ ,

$$\begin{aligned}
 \sum_{e \in \delta^-(s)} x_e - \sum_{e \in \delta^+(s)} x_e &= \sum_{e \in \delta^+(r)} x_e - \sum_{e \in \delta^-(r)} x_e \\
 &= \sum_{v \in R} \left( \sum_{e \in \delta^+(v)} x_e - \sum_{e \in \delta^-(v)} x_e \right) \\
 &= \sum_{e \in \delta^+(R)} x_e - \sum_{e \in \delta^-(R)} x_e \\
 &\leq \sum_{e \in \delta^+(s)} u_e - \sum_{e \in \delta^-(s)} l_e,
 \end{aligned}$$

de onde decorre o resultado pretendido.

- b. A solução do enunciado está assinalada a vermelho na Figura 9. Como se pode verificar, trata-se de um fluxo- $(r, s)$  admissível. Podemos averiguar se esse fluxo é máximo construindo o digrafo residual e averiguando se existe nesse digrafo um dicaminho- $(r, s)$ . Devido à presença de capacidades mínimas não nulas, a definição de arcos do tipo 2 deve ser adaptada:

Existe um arco  $vw^{(2)}$  se e só se  $x_{wv} > l_{wv}$ .

O digrafo residual  $G[x]$  está exibido na Figura 10. Existe um dicaminho- $(r, s)$  constituído pelos seguintes arcos:

$$rc^{(1)}, cd^{(1)}, da^{(2)}, ab^{(1)}, bs^{(1)}.$$

à custa do qual se obtém um novo fluxo- $(r, s)$  admissível, assinalado a vermelho na Figura 11. O digrafo residual  $G[x]$  está exibido na Figura 12. Os vértices acessíveis a partir de  $r$  em  $G[x]$  são os vértices do conjunto

$$R = \{r, a, c, d\}.$$

Como

$$u(\delta^+(R)) = u_{ab} + u_{ds} = 5 + 5 = 10, \quad l(\delta^-(R)) = l_{bd} = 2$$

então, pela alínea anterior, 8 é um limite superior para o valor de qualquer fluxo- $(r, s)$  admissível. Como o fluxo assinalado a vermelho na Figura 11 tem esse valor então concluímos tratar-se do fluxo máximo.

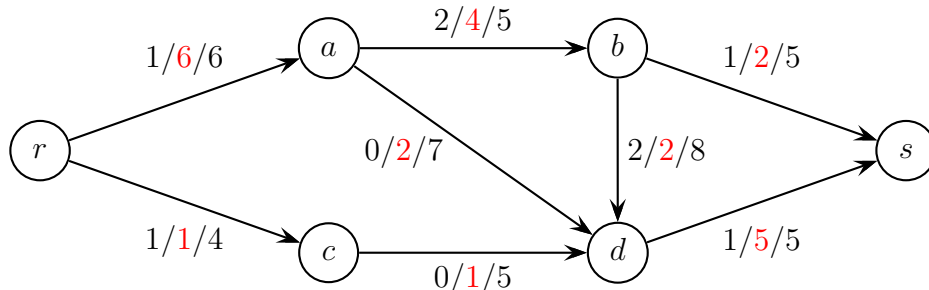


Figura 9:

■



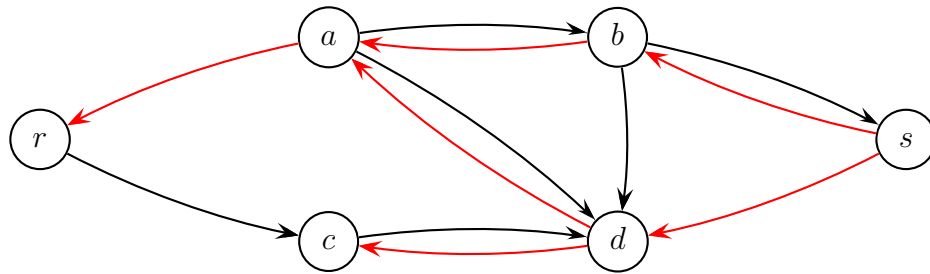


Figura 10:

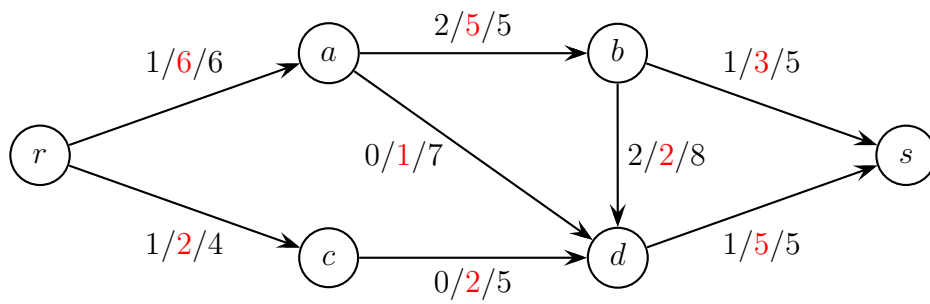


Figura 11:

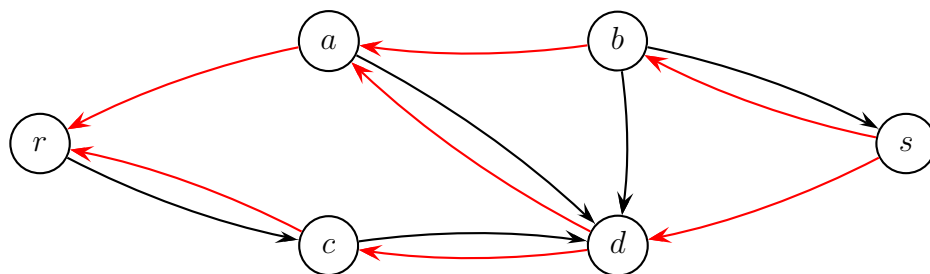


Figura 12:

5. Considere o grafo bipartido da Figura 13. Através do algoritmo estudado nas aulas, encontre um emparelhamento de cardinalidade máxima e uma cobertura por nós de cardinalidade mínima.

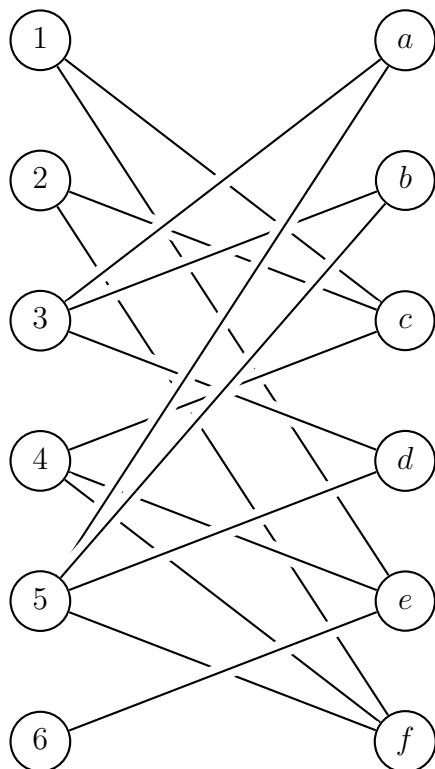


Figura 13:

*Solução:* Considere-se o emparelhamento  $M$  assinalado a negrito na Figura 14 onde estão também assinalados os vértices rotulados do algoritmo de pesquisa de um caminho aumentante explicado nas aulas. Não existindo um caminho aumentante concluímos que o emparelhamento exibido é de cardinalidade máxima. Os vértices rotulados são

$$L = \{1, 2, 4, 6, c, e, f\}.$$

Por um teorema das aulas, o conjunto

$$C = (V_1 \setminus L) \cup (V_2 \cap L) = \{3, 5\} \cup \{c, e, f\}$$

é uma cobertura por vértices de cardinalidade mínima (tal como se pode verificar). ■

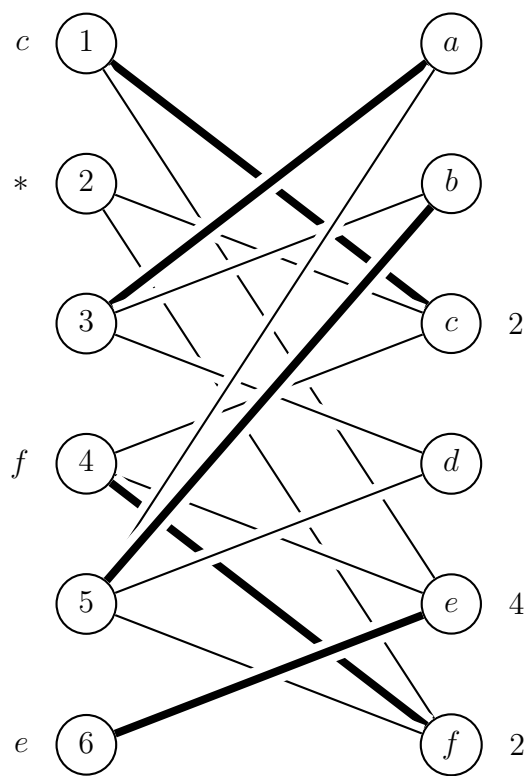


Figura 14:

6. Seja  $S = \{(x, y) \in [0, 1]^m \times \{0, 1\} : \sum_{i=1}^m x_i \leq my\}$ , um subconjunto de  $\mathbb{R}^{m+1}$ .

- Justifique que,  $\text{conv. hull}(S)$  é um poliedro e que tem dimensão  $m + 1$ .
- Mostre que,  $x_i \leq y$  é uma desigualdade válida para  $\text{conv. hull}(S)$  que induz uma faceta.
- Mostre que,

$$\text{conv. hull}(S) = \{(x, y) \in [0, 1]^{m+1} : 0 \leq x_i \leq y, i = 1, 2, \dots, m\}.$$

*Solução:*

- O conjunto  $\text{conv. hull}(S)$  é um polítopo porque  $S$  é a união de dois polítopos  $S_0$  e  $S_1$ , e

$$\begin{aligned} \text{conv. hull}(S) &= \text{conv. hull}(S_0 \cup S_1) \\ &= \text{conv. hull}(\text{conv. hull}(V_0) \cup \text{conv. hull}(V_1)) \\ &= \text{conv. hull}(V_0 \cup V_1), \end{aligned}$$

porque uma combinação convexa de combinações convexas é uma combinação convexa.

As colunas da seguinte matriz  $(m + 1) \times (m + 1)$  definem elementos de  $S$ ,

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ 1 & 1 & & & & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Além disso, formam um conjunto independente afim pois, após acrescentar uma linha de tudo-uns, a matriz resultante tem característica completa por colunas. Por isso,

$$\dim(\text{conv. hull}(S)) = m + 1.$$

- Seja  $(x, y) \in S$  qualquer. Se  $y = 1$  então, claramente,  $x_j \leq y$ . Se  $y = 0$  então  $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$ . Por isso, também neste caso,  $x_j \leq y$ . Por isso,  $x_j \leq y$  é uma desigualdade válida para  $\text{conv. hull}(S)$ .

Seja  $F = \{x \in \text{conv. hull}(S) : x_j = y\}$ , a face de  $\text{conv. hull}(S)$  induzida pela desigualdade  $x_j \leq y$ . Todas excepto a penúltima coluna da matriz em (4) pertencem a  $F$ . Por isso,  $\dim(F) = m$ . Como  $\dim(F) = \dim(\text{conv. hull}(S)) - 1$ , concluímos que  $F$  é uma faceta de  $\text{conv. hull}(S)$ .

- Provámos na alínea anterior que

$$\text{conv. hull}(S) \subseteq Q \equiv \{(x, y) \in [0, 1]^{m+1} : 0 \leq x_i \leq y, i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Reciprocamente, seja  $(\bar{x}, \bar{y}) \in Q$ , qualquer. Se  $\bar{y} = 0$  então  $(\bar{x}, \bar{y}) \equiv (0, 0) \in S$ . Suponhamos que  $\bar{y}$  pertence ao intervalo  $(0, 1]$ . Então,

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y}(\bar{x}/\bar{y}, 1) + (1 - \bar{y})(0, 0) \quad (5)$$

e, portanto,  $(\bar{x}, \bar{y})$  é uma combinação convexa de dois pontos distintos. Como

$$\sum_{j=1}^m \frac{\bar{x}_j}{\bar{y}} = \frac{1}{\bar{y}} \sum_{j=1}^m \bar{x}_j \leq \frac{1}{\bar{y}} \sum_{j=1}^m \bar{y} = m,$$

concluimos que  $(\bar{x}/\bar{y}, 1) \in S$ . Portanto, (5) exprime  $(\bar{x}, \bar{y})$  como combinação convexa de dois pontos distintos de  $S$ . Portanto,  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{conv.hull}(S)$ . Da arbitrariedade de  $(\bar{x}, \bar{y}) \in Q$  concluimos a inclusão recíproca.

■