Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Programação Linear: 16-01-2008

Duração: 2h30m

1. Considere o Programa Linear de maximização de $z = c^T x$, sujeita a $Ax \leq b$ e $x \geq 0$, com

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix} \text{ e } c = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Aplique 2 iterações do método simplex ao problema dado e indique se determinou a solução óptima.

   (b) Sem resolver o problema dual do dado indique a sua solução óptima.

   (c) Considere agora que o coeficiente b_2 foi modificado para -5. Indique o valor da função objectivo correspondente à solução óptima para o problema perturbado.

2. Considere os Programas Lineares

$$\text{(P)} \quad \min\{cx : Ax = b, x \geq 0\} \quad \text{e} \quad (\text{P}_\lambda) \quad \min\{cx : Ax = b + \lambda d, x \geq 0\},$$

onde λ é um escalar e d é um vector não nulo.

   (a) Mostre que se B é uma base associada a uma solução óptima de (P) e a uma solução óptima de ($\text{P}_{\lambda'}$), para algum $\lambda' > 0$, então B é uma base óptima de (P_λ) para todo o $0 \leq \lambda \leq \lambda'$.

   (b) Deduza uma condição para que a base B seja óptima para todo o $\lambda \geq 0$.

3. Uma empresa produz campainhas em três turnos. A tabela seguinte apresenta, para cada turno, o salário (em unidades monetárias) pago por hora de trabalho e o número de defeitos nas campainhas, assim como o preço a que estas são vendidas. Cada um dos 25 trabalhadores da empresa consegue produzir 10 campainhas durante um turno mas, por limitações do equipamento, não é possível ter mais do que 10 trabalhadores no mesmo turno. Diariamente podem vender-se 250 campainhas e o número médio de defeitos por campainha da produção diária não pode exceder 3.

turno	salário (por hora)	defeitos (por campainha)	preço de venda
0h-8h	20	2	24
8h-16h	12	4	18
16h-24h	16	3	22

Formule um Programa Linear para maximizar o lucro diário desta empresa.

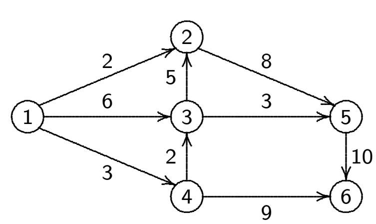
4. Sejam $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ uma rede a cujo arco (i,j) se associa o limite superior de capacidade $u_{ij} \in \mathbb{R}^+$ e s, t dois nós de $\mathcal{N}$.

   (a) Descreva um algoritmo de rotulação que, dado um fluxo admissível em $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$, determine a cadeia incremental com menor número de arcos entre os nós s e t.

   (b) Sem resolver o problema verifique se

(i,j)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,5)	(3,2)	(3,5)	(4,3)	(4,6)	(5,6)
x_{ij}	2	6	3	5	3	3	0	3	8

   é um fluxo máximo de 1 para 6 na rede:



   (c) Determine o fluxo máximo de 1 para 6 na rede acima, usando o algoritmo de 4.(a) e partindo do fluxo nulo.

5. (a) Formule o problema da afectação como um problema de fluxo de custo mínimo.
   (b) Deduza a condição de optimalidade para resolver o problema da afectação pelo método simplex.
   (c) Utilize o método do húngaro para resolver o problema de afectação definido pela seguinte matriz de custos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 10 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$