Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Recurso de Programação Linear: 06-02-2008

Duração: 2h30m

1. Considere o Programa Linear de maximização de $z = c^T x$, sujeita a $Ax \leq b$ e $x \geq 0$, com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ e } c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determine a solução associada a $J = \{1, 2, 3\}$ e classifique-a.

   (b) Resolva o problema dado a partir da solução básica com $J = \{2, 3, 5\}$.

   (c) Escreva o problema dual do dado indique a sua solução óptima.

2. Uma fábrica utiliza dois tipos de combustível: A e B. O combustível A é poluente, ao contrário do combustível B que é não poluente. A empresa pretende determinar as quantidades a adquirir mensalmente de cada combustível, de forma a laborar a custo mínimo, cumprindo as normas anti-poluição, que impõem que pelo menos 1/4 do combustível queimado seja do tipo não poluente. Queimar 1 tonelada de combustível A custa 5 unidades monetárias (u.m) à empresa, enquanto que queimar 1 tonelada de B custa 15 u.m.. Para satisfazer as necessidades da fábrica é preciso queimar, pelo menos, 6 t/mês de combustível. O processo do combustível A requer 2 trabalhadores/t enquanto que o processo de queima de B requer 4 trabalhadores/t. Actualmente há 40 trabalhadores afectos àquela secção e a empresa não pretende reforçar esse número.

   (a) Formule um Programa Linear que permita resolver o problema dado.

   (b) Actualmente a fábrica queima 12 t/mês de combustível A e 4 t/mês de B. Será esta a melhor opção?

   Nota: Se não resolveu a alínea anterior considere, no que se segue, o modelo:

$$\begin{array}{lcccl} \min & 5x_1 & + & 15x_2 & \\ \text{s.a.} & x_1 & + & x_2 & \geq 6 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq 20 \\ & x_1 & - & 3x_2 & \leq 0 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

   (c) O preço do combustível A tem-se mantido relativamente estável. No entanto, o preço de B é muito volátil e prevê-se uma descida muito significativa para breve. A partir de que valor é posta em causa a solução óptima do problema anterior?

3. Considere os Programas Lineares

$$(\mathsf{P}) \quad \min\{cx : Ax = b, x \geq 0\} \quad \text{e} \quad (\mathsf{P}_\lambda) \quad \min\{cx : Ax = b + \lambda d, x \geq 0\},$$

   onde λ é um escalar e d é um vector não nulo.

   Mostre que se B é uma base associada a uma solução óptima de (P) e a uma solução óptima de ($\mathsf{P}_{\lambda'}$), para algum $\lambda' > 0$, então B é uma base óptima de (P_λ) para todo o $0 \leq \lambda \leq \lambda'$.

4. (a) Descreva um algoritmo para determinar o caminho de capacidade máxima entre os nós s e t de uma rede $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ a cujo arco (i, j) está associado o valor $u_{ij} \in \mathbb{R}^+$, que representa o seu limite superior de capacidade.

   (b) Explique a diferença entre algoritmo de rotulação temporária e algoritmo de rotulação definitiva.

5. Determine, se possível, uma cadeia incremental de 1 para 5 na rede com os limites superiores de capacidade e o fluxo seguintes:

(i,j)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,5)	(3,2)	(3,5)	(4,3)	(5,6)	(6,4)
u_{ij}	2	6	3	8	5	3	2	10	9
x_{ij}	2	6	2	7	5	2	1	1	1

   Proceda à actualização do fluxo e diga se encontrou o fluxo máximo de 1 para 5.

6. (a) Formule o problema de transportes como um problema de fluxo de custo mínimo.

   (b) Deduza a condição de optimalidade para resolver o problema de transportes pelo método simplex.

   (c) Três fábricas F_1, F_2 e F_3 produzem diariamente 5, 20 e 5 toneladas de um produto, respectivamente, e fornecem-no aos postos de venda V_1 e V_2. Cada posto vende 10 toneladas desse produto e os custos unitários de transporte das fábricas para os postos de venda são dados pela tabela:

	V_1	V_2
F_1	3	1
F_2	2	3
F_3	2	4

   Efectue uma iteração do método simplex para resolver o problema definido e diga se determinou a solução óptima.