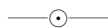


Programação Linear

Ano Lectivo 2008/2009

16 Janeiro, 2009

Exame Época Normal



1. Considere o seguinte programa linear

$$\begin{array}{rll} \text{Minimize} & 3x_1 & +x_3 \\ \text{sujeito a} & x_1 - 2x_2 & \geq 2 \\ & 2x_1 - 3x_2 + x_3 & = 5 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}$$

- (a) Mostre que a solução  $\bar{x} = (0, 0, 5)^T$  é básica primal não admissível e dual admissível.
  - (b) Escreva o programa linear Fase 1 associado à solução básica da alínea anterior.
  - (c) Resolva graficamente o dual do programa linear.
  - (d) Determine a solução óptima do programa linear sem usar os métodos primal e dual simplex.
  - (e) Indique, justificando, se as soluções óptimas do primal e do dual são únicas.
2. Um fabricante de mobiliário é proprietário de três fábricas que necessitam mensalmente de 300, 250 e 150 toneladas de madeira. O fabricante pretende encomendar madeira a três empresas fornecedoras. A produção mensal de cada uma das empresas é de 100, 350 e 250 toneladas. Os custos de transporte por tonelada entre as empresas fornecedoras e as fábricas são dados na seguinte tabela:

empresas fornecedoras	fábricas		
	1	2	3
1	10	6	5
2	1	7	8
3	2	3	3

O fabricante pretende fazer a sua encomenda de modo a reduzir ao máximo o custo total de transporte.

- (a) Formule o Problema do Fabricante como um Problema de Optimização.
- (b) Mostre que o Problema de Optimização tem solução óptima.
- (c) Determine a árvore geradora de custo mínimo do grafo associado ao Problema de Optimização.
- (d) Mostre que a árvore geradora de custo mínimo fornece uma solução básica não admissível para o Problema de Optimização e apresente o Problema  $M$ -grande associado a essa solução básica.
- (e) Indique a encomenda do fabricante, resolvendo o Problema de Optimização por um algoritmo à sua escolha.

3. Seja  $A$  uma matriz de ordem  $m \times n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ , e considere o conjunto

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$$

- (a) Mostre que  $K$  é convexo.
  - (b) Defina direcção ilimitada em  $K$ .
  - (c) Mostre que  $K$  é limitado se e só se o sistema  $A^T y \geq e$  tem solução, com  $e \in \mathbb{R}^n$  um vector de componentes unitárias.
4. Desenvolva o tema: “Resolução numérica de problemas de fluxo de custo mínimo”.
5. Considere o sistema de equações lineares  $Ax = b$  com  $A$  uma matriz de ordem  $m \times n$  e de característica  $m < n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ .

(a) Mostre que a determinação da solução de norma  $\ell_\infty$  mínima do sistema  $Ax = b$  é equivalente a um programa linear.

(b) Mostre que a solução de norma  $\ell_\infty$  mínima de  $Ax = b$  existe.

**Nota:**  $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$ , para qualquer vector  $x \in \mathbb{R}^n$ .

#### Cotações:

- 1 - 5.0 (1.0 + 1.0 + 1.0 + 1.0 + 1.0)
- 2 - 7.0 (1.0 + 2.0 + 1.0 + 1.0 + 2.0)
- 3 - 4.0 (1.5 + 0.25 + 2.25)
- 4 - 2.0
- 5 - 2.0 (1.0 + 1.0)