Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Programação Linear

Ano Lectivo 2008/2009 — 2 Fevereiro, 2009

Exame Época de Recurso

1. Considere o programa linear

$$\begin{array}{rlllll} \text{Minimize} & x_1 & -x_2 & & -2x_4 & \\ \text{sujeito a} & x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 1 \\ & 2x_1 & -4x_2 & & +2x_4 & = 2 \\ & x_i \geq 0, & i = 1,2,3,4 & & & \end{array}$$

   (a) Mostre que a solução básica de variáveis básicas x_2 e x_4 é a única solução óptima desse programa.

   (b) Resolva o dual algebricamente e graficamente.

2. Considere o Programa Linear

$$\begin{array}{rl} \text{Minimize} & c^T x \\ \text{sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

   com A uma matriz de ordem $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $c, x \in \mathbb{R}^n$.

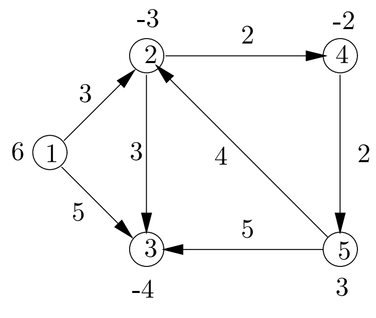
   (a) Mostre que $\overline{x}$ é solução óptima do programa linear se e só se existem vectores $\overline{u} \in \mathbb{R}^m$ e $\overline{v} \in \mathbb{R}^n$ tais que $(\overline{x}, \overline{u}, \overline{v})$ é solução do sistema

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ A^T u + v &= c \\ v \geq 0,\ x &\geq 0 \\ v^T x &= 0 \end{aligned}$$

   (b) Determine a solução óptima do programa linear

$$\begin{array}{rl} \text{Minimize} & x_1 + 2x_2 + 4x_3 + \ldots + 2^{n-1} x_n \\ \text{sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

3. Considere a seguinte rede $G = (V, E)$



   onde o número real associado a cada nó i representa a quantidade de fluxo b_i e o número real c_{ij} associado a cada aresta (i, j) representa o respectivo custo unitário.

   (a) Determine a árvore geradora de custo mínimo.

   (b) Mostre que a árvore geradora de custo mínimo não fornece uma solução óptima para o Problema de Fluxo de Custo Mínimo.

   (c) Escreva a formulação matemática de um Problema Fase 1 associado à árvore geradora de custo mínimo.

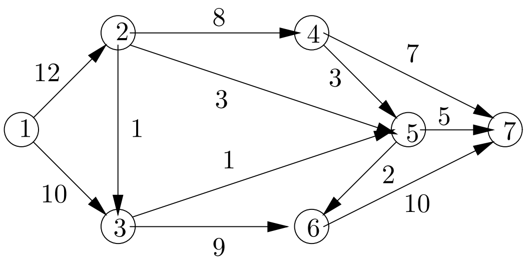
(d) Mostre que a partição $\{J, L\}$ de E definida por

$$J = \{(1,2), (2,3), (2,4), (5,3)\}, \quad L = E - J$$

fornece uma solução básica admissível para o Problema de Fluxo de Custo Mínimo.

(e) Determine a solução óptima do Problema de Fluxo de Custo Mínimo usando o método simplex com a solução inicial obtida em (d).

4. Considere a seguinte rede $G = (V, E)$



onde cada número real em cada aresta (i, j) representa a capacidade máxima u_{ij}.

(a) Formule o Problema de Fluxo Máximo entre o nó 1 e o nó 7 como um Problema de Fluxo de Custo Mínimo.

(b) Mostre que o Problema de Fluxo Máximo entre o nó 1 e o nó 7 tem solução.

5. Desenvolva o tema: "Resolução Numérica de Problemas de Transportes e Afectação".

6. Considere o problema

$$\begin{array}{rl} \text{Minimize} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} c_j x_j + f(x_n) \\ \text{sujeito a} & Ax \leq b \\ & 0 \leq x \leq e \end{array}$$

onde $c_j \in \mathbb{R}^1$, $j = 1, \ldots, n-1$, $x \in \mathbb{R}^n$, $e \in \mathbb{R}^n$ é um vector de componentes unitárias, $b \in \mathbb{R}^m$ e não negativo, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, e $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ é a função definida por

$$f(x_n) = \begin{cases} \alpha x_n + \beta & \text{se } 0 \leq x_n \leq \frac{1}{2} \\ \gamma x_n + \theta & \text{se } \frac{1}{2} \leq x_n \leq 1 \end{cases}$$

onde α, β, γ e θ são números reais positivos tais que $\alpha < \gamma$ e $\frac{\alpha}{2} + \beta = \frac{\gamma}{2} + \theta$.

(a) Mostre que esse programa é equivalente a um programa linear.

(b) Mostre que esse programa tem uma solução óptima.

Cotações:

1.	(a)	—	2.0
	(b)	—	2.0
2.	(a)	—	1.5
	(b)	—	1.5
3.	(a)	—	1.0
	(b)	—	1.0
	(c)	—	1.0
	(d)	—	1.0
	(e)	—	2.0
4.	(a)	—	1.5
	(b)	—	1.5
5.		—	2.0
6.	(a)	—	1.0
	(b)	—	1.0