Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Programação Linear

Ano Lectivo 2009/2010 15 Janeiro, 2010

Exame Época Normal

1. Considere o programa linear

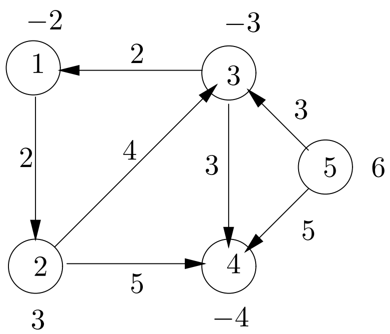
$$\begin{array}{rrrcl} \text{Minimize} & x_1 & +2x_2 & & \\ \text{sujeito a} & -x_1 & +3x_2 & \geq & 3 \\ & 2x_1 & +x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

   (a) Determine graficamente a sua solução óptima.

   (b) Determine a solução óptima do dual, sem utilizar o método simplex.

   (c) Mostre que as soluções óptimas do programa e do seu dual são únicas.

2. Considere a seguinte rede $G = (V, E)$:



onde o número real associado a cada nó i representa a quantidade de fluxo b_i e o número real c_{ij} associado a cada aresta representa o respectivo custo unitário.

   (a) Determine a árvore geradora de custo mínimo.

   (b) Mostre que a árvore geradora de custo mínimo fornece uma solução básica primal não admissível e dual admissível.

   (c) Escreva a formulação matemática do Problema M-grande sem nós adicionais associado à árvore geradora de custo mínimo e indique uma solução básica admissível para esse problema.

   (d) Mostre que a partição de E definida por

$$J = \{(2,4),(3,1),(3,4),(5,3)\},\ L = E - J$$

   fornece uma solução básica primal admissível para o Problema de Fluxo de Custo Mínimo em G.

   (e) Determine a solução óptima para o Problema de Fluxo de Custo Mínimo em G usando o método simplex com a solução inicial obtida em (d).

3. A Câmara Municipal de Coimbra deseja construir um Restaurante, um Bar, um Salão de Festas e um Teatro. Para isso contactou quatro empresas de construção civil que apresentaram as seguintes propostas (em unidade monetária):

	Empresa 1	Empresa 2	Empresa 3	Empresa 4
Restaurante	63	65	69	70
Bar	55	58	56	59
Salão de Festas	73	70	72	75
Teatro	122	121	120	123

A Câmara pretende construir as quatro obras de modo a que o custo total seja o menor possível e por razões operacionais resolveu adjudicar no máximo uma obra a cada empresa.

   (a) Formule o problema de adjudicação das obras às empresas como um Problema de Optimização.

   (b) Mostre que o Problema de Optimização se reduz a um Problema de Fluxo de Custo Mínimo.

   (c) Mostre que o Problema de Optimização tem solução óptima.

4. Desenvolva o tema: "Resolução Numérica de Programas Lineares".

5. Considere o programa linear

$$\begin{array}{rl} \text{Minimize} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & l_j \leq x_j \leq u_j, \ j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

onde $c, x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, A é uma matriz de ordem $m \times n$, com $m < n$ e l_j e u_j são números reais.

(a) Mostre que x é solução óptima do programa linear se e só se existem vectores $y \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$ e $w \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$\begin{array}{l} Ax = b \\ c - A^T y = w - v \\ w \geq 0, \ v \geq 0 \\ \left.\begin{array}{l} w_j(l_j - x_j) = 0 \\ v_j(u_j - x_j) = 0 \\ l_j \leq x_j \leq u_j \end{array}\right\} \ j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

(b) Mostre que x é solução óptima do programa linear se e só se existem vectores $y \in \mathbb{R}^m$ e $z \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$\begin{array}{l} z = c - A^T y \\ Ax = b \\ \left.\begin{array}{l} x_j = l_j \Rightarrow z_j \geq 0 \\ l_j < x_j < u_j \Rightarrow z_j = 0 \\ x_j = u_j \Rightarrow z_j \leq 0 \\ l_j \leq x_j \leq u_j \end{array}\right\} \ j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

6. Considere o programa

$$\begin{array}{rl} \text{Minimize} & f(x) = \max\{\ c^T x + \alpha, d^T x + \beta\} \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

com $b \in \mathbb{R}^m$, A uma matriz de ordem $m \times n$, com $m < n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$. Mostre que esse programa é equivalente a um programa linear.

Cotações:

1 -	4.5 (1.5 + 1.5 + 1.5)
2 -	5.5 (1.0 + 1.0 + 1.0 + 1.0 + 1.5)
3 -	3.0 (1.0 + 1.25 + 0.75)
4 -	2.0
5 -	3.5 (1.5 + 2.0)
6 -	1.5