Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Programação Linear

Ano Lectivo 2009/2010 28 Janeiro, 2010

Exame Época de Recurso

—⊙—

1. Considere o programa linear

$$\begin{array}{rrrrcl} \text{Maximize} & -x_1 & & +x_3 & & \\ \text{sujeito a} & x_1 & -2x_2 & & \geq & 2 \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

   (a) Determine a sua forma normal.

   (b) Mostre que a sua solução básica de variáveis básicas x_3 e x_4 é dual admissível e primal não admissível.

   (c) Determine as soluções óptimas do programa e do seu dual usando o método dual–simplex e iniciando o processo com a solução básica referida em (b).

   (d) Mostre que as soluções óptimas do programa e do seu dual são únicas.

2. Numa cidade há 3 padarias P_1, P_2 e P_3 que produzem diariamente 10 mil pães e os fornecem a quatro postos de venda M_1, M_2, M_3 e M_4. Sabe-se que cada um dos postos deve vender 6, 7, 8 e 9 mil pães respectivamente, e que os custos de transporte de cada milhar de pães das padarias para os postos de venda são dados pela seguinte tabela

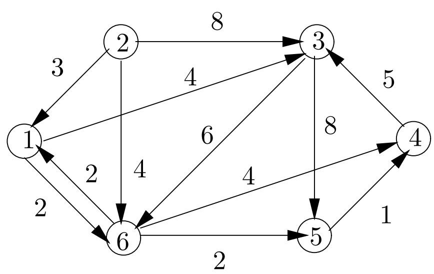
	j			
i	M_1	M_2	M_3	M_4
P_1	2	3	3	6
P_2	9	5	3	5
P_3	1	10	3	2

   (a) Formule o problema de transportes correspondente.

   (b) Escreva o problema de transportes na forma normal e mostre que a característica da matriz das igualdades é 6.

   (c) Determine a solução óptima do problema.

3. Considere a seguinte rede $G = (V, E)$



onde o número real associado a cada aresta (i, j) representa o custo da ligação de i para j.

   (a) Apresente a formulação matemática do Problema do Caminho Mais Curto do nó 2 ao nó 4.

   (b) Mostre que o problema da alínea anterior tem solução óptima.

4. Considere o programa linear

$$\begin{array}{rl} \text{Minimize} & c^T x \\ \text{sujeito a} & a^T x \leq b \\ & 0 \leq x \leq d \end{array}$$

com $a, c, d \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^1$ dados.

   (a) Mostre que o conjunto admissível do programa dado é convexo.

   (b) Mostre que x é solução óptima desse programa se e só se existem $y \in \mathbb{R}^1$, $u \in \mathbb{R}^n$ e $v \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$\begin{gathered} c + ya = u - v \\ a^T x \leq b \\ 0 \leq x \leq d \\ u \geq 0, v \geq 0, y \geq 0 \\ y(a^T x - b) = 0 \\ x^T u = v^T (d - x) = 0 \end{gathered}$$

   (c) Determine a solução óptima do programa linear

$$\begin{array}{rl} \text{Maximize} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \\ \text{sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq \frac{5}{2} \\ & 0 \leq x_i \leq 1, \ i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{array}$$

5. Desenvolva o tema: "Dualidade linear: propriedades e algoritmos de Programação Linear".

6. Considere o programa

$$\begin{array}{rl} \text{Minimize} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j |x_j| \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \end{array}$$

onde A é uma matriz de ordem $m \times n$, com $m < n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $x = (x_j) \in \mathbb{R}^n$. Mostre que se c_j é positivo para todo $j = 1, 2, \ldots, n$ então este programa é equivalente a um programa linear.

Cotações:

1.	(a)	—	0.5
	(b)	—	1.5
	(c)	—	2.0
	(d)	—	1.0
2.	(a)	—	1.0
	(b)	—	1.5
	(c)	—	2.5
3.	(a)	—	1.5
	(b)	—	1.5
4.	(a)	—	1.0
	(b)	—	1.0
	(c)	—	1.0
5.		—	2.0
6.		—	2.0