Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

PROGRAMAÇÃO LINEAR

Ano Lectivo 2010/2011 14 Janeiro, 2011

Exame Época Normal

1. Considere o seguinte programa linear

$$\begin{array}{rrrrrcl} \text{Minimize} & -5x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +2x_4 & & \\ \text{sujeito a} & -4x_1 & & +2x_3 & +x_4 & = & 2 \\ & x_1 & -2x_2 & & +x_4 & = & 2 \\ & \multicolumn{6}{l}{x_i \geq 0,\ i = 1,2,3,4} \end{array}$$

   (a) Verifique se a solução básica de variáveis básicas x_3 e x_4 é primal ou dual admissível.

   (b) Determine a solução óptima do programa linear usando um método à sua escolha e iniciando o processo com a solução básica da alínea anterior.

   (c) Mostre que a solução óptima do programa linear não é única e determine uma outra solução óptima do programa.

2. A Universidade de Coimbra deseja construir um refeitório, um ginásio e uma residência universitária no Pólo 2. Para isso contactou 3 empresas de construção civil que apresentaram as seguintes propostas:

	Empresa 1	Empresa 2	Empresa 3
Refeitório	63	65	69
Ginásio	56	58	56
Residência Universitária	73	70	72

   A Universidade pretende construir as três obras de modo a que o custo total seja o menor possível e por razões orçamentais decidiu adjudicar no máximo uma obra a cada empresa.

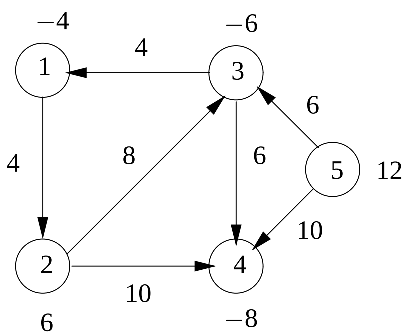
   (a) Formule o problema de adjudicação das obras às empresas como um Problema de Optimização.

   (b) Mostre que o Problema de Optimização da alínea (a) é equivalente a um Problema de Fluxo de Custo Mínimo.

   (c) Mostre que o Problema de Optimização da alínea (a) tem solução óptima.

   (d) Mostre que a escolha da Universidade de Coimbra consistiu em atribuir a construção do Refeitório à Empresa 1, a Residência Universitária à Empresa 2 e o Ginásio à Empresa 3.

3. Considere a seguinte rede $G = (V, E)$:



   onde o número real associado a cada nó i representa a quantidade de fluxo b_i e o número real c_{ij} associado a cada aresta representa o respectivo custo unitário.

   (a) Determine a árvore geradora de custo máximo.

   (b) Mostre que a árvore geradora de custo máximo fornece uma solução básica não admissível para o Problema de Fluxo de Custo Mínimo em G e determine o Problema M–grande associado a essa solução básica.

   (c) Mostre que a partição de E definida por

$$J = \{(2,4),(3,1),(3,4),(5,3)\},\ L = E - J$$

   fornece uma solução básica admissível para o Problema de Fluxo de Custo Mínimo em G.

   (d) Determine a solução óptima do Problema de Fluxo de Custo Mínimo em G, usando o método simplex e iniciando o processo com a solução básica definida na alínea anterior.

4. Desenvolva o tema “Resolução numérica de programas lineares”.

5. Considere o conjunto K definido por
$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \leq 0, \; c^T x = 1 \right\}$$
onde $c \in \mathbb{R}^n$ e A é uma matriz de ordem $m \times n$.

   (a) Mostre que K é convexo.

   (b) Mostre que K é não vazio se e só se o sistema
   $$A^T y = c, \; y \geq 0$$
   não tem solução.

6. Sejam a, b e c três números reais tais que $a < c < b$ e considere a função f contínua em $[a,b]$ e definida por
$$f(x) = \begin{cases} g_1 x + h_1 & \text{se} \quad x \in [a,c] \\ g_2 x + h_2 & \text{se} \quad x \in [c,b] \end{cases}$$
com g_1, g_2, h_1, h_2 números reais e $g_1 \leq g_2$. Mostre que o programa
$$\begin{array}{rl} \text{Minimize} & f(x) \\ \text{sujeito a} & a \leq x \leq b \end{array}$$
é equivalente a um programa linear.

Cotações:

1.	(a)	–	1.0
	(b)	–	1.5
	(c)	–	1.0
2.	(a)	–	1.0
	(b)	–	1.5
	(c)	–	1.0
	(d)	–	1.0
3.	(a)	–	1.0
	(b)	–	1.5
	(c)	–	1.0
	(d)	–	1.5
4.		–	2.0
5.	(a)	–	1.0
	(b)	–	2.0
6.		–	2.0