Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Programação Linear

Ano Lectivo 2010/2011 17 Dezembro, 2010

Frequência

1. Considere o seguinte programa linear

$$\begin{array}{rlllll} \text{Minimize} & 3x_1 & & +x_3 & & \\ \text{sujeito a} & x_1 & -2x_2 & & \geq & 2 \\ & 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & = & 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & & & \end{array}$$

   (a) Determine o dual do programa linear.

   (b) Mostre que a solução $\overline{x} = (2, 0, 1)$ é a única solução óptima do programa linear.

   (c) Mostre que o dual tem uma única solução óptima e determine-a a partir de dois processos que não usem a representação gráfica desse programa.

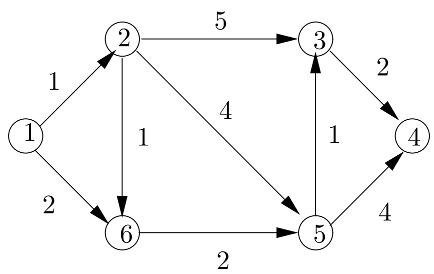
2. Numa cidade há três fábricas F_1, F_2 e F_3 que produzem diariamente 20, 40 e 40 toneladas de um determinado produto respectivamente e o fornecem a três postos de venda V_1, V_2 e V_3. Sabe-se que cada um dos postos de venda deve vender 10, 40 e 50 toneladas respectivamente e que os custos de transporte de cada tonelada das fábricas para os postos de venda são dados pela seguinte tabela

	j		
i	V_1	V_2	V_3
F_1	10	4	8
F_2	12	3	7
F_3	1	3	2

   (a) Formule o problema de transportes correspondente.

   (b) Determine a solução óptima do problema.

3. Considere a seguinte rede $G = (V, E)$:



   onde o número real associado a cada aresta (i, j) representa o custo da ligação de i para j.

   (a) Mostre que o Problema do Caminho Mais Curto entre os nós 1 e 4 é equivalente a um Problema de Fluxo de Custo Mínimo.

   (b) Mostre que o Problema do Caminho Mais Curto entre os nós 1 e 4 tem solução óptima.

4. Desenvolva o tema “Resolução de Problemas de Fluxo de Custo Mínimo Lineares”.

5. Considere o programa linear

$$
\begin{array}{rl}
\text{Minimize} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{sujeito a} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = 1 \\
 & x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n
\end{array}
$$

onde $a = (a_1, \ldots, a_n) \neq 0$ é um vector com componentes $a_j \in \{0, 1\}$ e $c_j \in \mathbb{R}$ para todo $j = 1, 2, \ldots, n$. Mostre que o programa linear é ilimitado se e só se existe pelo menos um $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $a_j = 0$ e $c_j < 0$.

6. Considere o programa linear

$$
\begin{array}{rl}
\text{Minimize} & c^T x \\
\text{sujeito a} & Ax = b \\
 & l_j \leq x_j \leq u_j,\ j = 1, 2, \ldots, n
\end{array}
$$

onde $c, x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, A uma matriz de ordem $m \times n$ com $m < n$ e l_j, u_j são números reais. Mostre que x é solução óptima do programa linear se e só se existem vectores $y \in \mathbb{R}^m$ e $z \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$
\begin{array}{l}
z = c - A^T y \\
Ax = b \\
\left.\begin{array}{l}
x_j = l_j \Rightarrow z_j \geq 0 \\
l_j < x_j < u_j \Rightarrow z_j = 0 \\
x_j = u_j \Rightarrow z_j \leq 0 \\
l_j \leq x_j \leq u_j
\end{array}\right\} \ j = 1, 2, \ldots, n
\end{array}
$$

Cotações:

1.	(a)	—	0.5
	(b)	—	0.5
	(c)	—	0.75
2.	(a)	—	0.5
	(b)	—	1.75
3.	(a)	—	1.0
	(b)	—	0.5
4.		—	1.5
5.		—	1.5
6.		—	1.5