**Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra**
**Probabilidades**
**Exame**

Duração: 2h 30m 7 - 1 - 2000

**Observações:**

**1. A resolução completa dos problemas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.**

**2. Durante o decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos.**

## I

Os condutores suspeitos de terem ingerido álcool são submetidos a um controlo que se inicia pelo "teste do balão" o qual dá um resultado positivo ou negativo, de acordo com determinadas normas em vigor. Se o resultado deste teste é positivo, e só nesse caso, o condutor é ainda submetido a uma análise de sangue para determinação do teor de álcool.

Sabe-se que quando o índice de alcoolemia é elevado o resultado do "teste do balão" é positivo em 85% dos casos; quando o índice de alcoolemia não é elevado, em 90% dos casos o resultado do teste é negativo. Por outro lado, quando o índice de alcoolemia do condutor é elevado, a análise de sangue permite detectar esse facto em 90% dos casos; quando o índice não é elevado, a análise nunca dá um resultado falso.

Admita que 20% dos condutores suspeitos têm de facto um índice de alcoolemia elevado.

1. Mostre que a percentagem de resultados positivos que se obtêm ao efectuar o "teste do balão" sobre os condutores suspeitos é igual a 25%.

2. Se forem observados 20 condutores suspeitos, escolhidos de modo aleatório, qual a probabilidade de ser necessário efectuar pelo menos 2 análises ao sangue?

3. Qual a probabilidade de um condutor suspeito que tem efectivamente um elevado índice de alcoolemia não ser detectado por este tipo de controlo?

## II

Os ovos vendidos num determinado supermercado são apresentados em caixas com a classificação M ou G, consoante o tamanho dos ovos que contêm. Sejam $X$ e $Y$ as variáveis aleatórias que representam o número de caixas de ovos do tipo M e do tipo G, respectivamente, adquiridas semanalmente por cada cliente do supermercado. Os registos do supermercado permitem afirmar que a função de probabilidade de $X$ é dada por

$$P(X=x)=\begin{cases} 0.5, & x=0 \\ 0.3, & x=1 \\ 0.2, & x=2 \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1,2\}. \end{cases}$$

(v.p.f.)

1. Calcule o número médio de caixas de ovos do tipo M adquiridas semanalmente por cada cliente.

2. Sabe-se que, semanalmente,

- dos clientes que não compram ovos do tipo M, 60% não compram ovos do tipo G e 40% compram 1 caixa;
- dos clientes que compram 1 caixa de ovos do tipo M, 80% não compram ovos do tipo G e 20% compram 1 caixa deste tipo;
- nenhum cliente que compra 2 caixas de ovos do tipo M compra ovos do tipo G.

a) Calcule a probabilidade de um cliente, escolhido ao acaso, não comprar ovos durante uma semana.

b) Determine a lei de probabilidade de $(X, Y)$.

c) Calcule o número médio de caixas de ovos adquiridas semanalmente por cada cliente.

3. Admita que os pesos dos ovos do tipo M são independentes e seguem uma lei normal de média 70 $g$ e desvio padrão 5 $g$.

a) Qual a probabilidade de um ovo do tipo M pesar mais de 75 $g$?

b) Escolhem-se ao acaso 6 ovos do tipo M.

i) Qual a probabilidade do peso do ovo menos pesado ser inferior a 75 $g$?

ii) Determine um minorante para a probabilidade do peso total dos 6 ovos distar do seu valor médio menos de 30 $g$.

## III

Seja $X$ uma variável aleatória real cuja lei de probabilidade, $P_X$, verifica

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b, \quad P_X(]a, b[) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x}\, \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)\ dx,$$

onde $\lambda$ é um número real positivo.

1. Prove que a variável aleatória $X$ é absolutamente contínua.

2. Mostre que $E\left(X^k\right) = \frac{k!}{\lambda^k}$, $k \in \mathbb{N}$.

3. Sejam $X_1$ e $X_2$ duas variáveis aleatórias independentes e seguindo ambas a lei de $X$.

a) Prove que a densidade de $T = X_1 + X_2$ é

$$f_T(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

b) Construa a matriz de variâncias-covariâncias de $(X_1, T)$.

**Cotação:**

I. 5.5 valores
II. 8.25 valores
III. 6.25 valores.