DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
PROBABILIDADES
EXAME

Duração: 2h 30m **7 - 2 - 2000**

Observações:
1. A resolução completa dos problemas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.
2. Durante o decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos.

I

Uma determinada doença afecta de forma grave 2% dos indivíduos de uma população e de forma moderada 10% dessa mesma população. Os restantes indivíduos não estão afectados pela doença.

Certo laboratório dispõe de um teste para diagnosticar a doença, o qual dá um resultado positivo em 90% dos casos graves, em 60% dos casos moderados e em 2.5% dos indivíduos não afectados pela doença.

1. Um indivíduo, escolhido ao acaso na população, é submetido ao teste.

(a) Qual a probabilidade do resultado do teste ser positivo?

(b) Qual a probabilidade do indivíduo ter a doença de forma grave e o resultado do seu teste ser negativo?

(c) Se o teste der um resultado positivo, qual é a probabilidade do indivíduo estar afectado pela doença?

2. É efectuado um rastreio da doença sendo submetidos ao teste 20 indivíduos, escolhidos ao acaso na população. A população ficará sujeita a um regime especial de vigilância médica se nesse rastreio pelo menos três testes derem resultados positivos. Admitindo que os resultados dos testes são independentes, qual a probabilidade da população ficar sujeita ao regime de vigilância?

II

Dois jogadores lançam alternadamente um par de dados equilibrados (com as faces numeradas de 1 a 6) analisando, em cada lançamento, o total dos pontos obtidos. É considerado vencedor aquele que primeiro obtiver um total de pontos igual a 7.

Seja X a variável aleatória real que descreve o número de lançamentos efectuados até um jogador ser considerado vencedor.

1. Determine a lei da variável aleatória X.

2. Mostre que a esperança matemática de X é 6.

3. Determine a probabilidade de ser considerado vencedor o jogador que inicia o jogo.

(v.p.f.)

III

Sejam X e Y variáveis aleatórias reais definidas sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, independentes.

1. Seja $\mathcal{B}$ a tribo de Borel sobre $\mathbb{R}$. Prove que se g_1 e g_2 são funções reais de variável real tais que

$$\forall B \in \mathcal{B},\ g_i^{-1}(B) \in \mathcal{B}, \quad i = 1, 2,$$

então $g_1(X)$ e $g_2(Y)$ são variáveis aleatórias reais independentes.

2. Exprima a função de repartição da variável aleatória $Z = \min(X, Y)$ em termos das funções de repartição de X e Y.

3. Suponha que X segue uma lei normal de média 1 e desvio-padrão 2 e que Y é absolutamente contínua de densidade

$$f_Y(y) = 2e^{-2y}\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y),\ y \in \mathbb{R}.$$

(a) Calcule $P((X, Y) \in\ ]-3, 1[\times]1, 2[)$.

(b) Sabendo que $E\left(Y^k\right) = \dfrac{k!}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$, obtenha a matriz de variâncias-covariâncias do vector aleatório $(X, 4X+Y+1)$.

(c) Determine a função densidade do vector (X, e^{-Y}).

(d) Calcule $P(Z^2 - Z < 0)$.

Nota: Dizemos que a variável aleatória real X segue uma lei normal de parâmetros m e σ, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$, se a sua lei é absolutamente contínua de densidade

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Cotação

I - 5.5 valores

II - 5.25 valores

III - 9.25 valores