Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Probabilidades
Exame

Duração: 2h 30m 5 - 5 - 2000

Observações: 1. A resolução completa dos problemas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados. 2. Durante o decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos.

I

1. Considere um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ elementos de $\mathcal{A}$, dois a dois incompatíveis e tais que $P(A_i) > 0$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Prove que se $B \in \mathcal{A}$ é tal que

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

então

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B/A_i).$$

2. Uma fábrica de pilhas utiliza três aparelhos de produção, A, B, C, que funcionam de modo independente, sendo o volume diário de produção de cada aparelho de 1000, 1500 e 2500 pilhas, respectivamente. Sabe-se que a probabilidade de uma pilha ser defeituosa quando produzida pelo aparelho A é 0.001; as probabilidades correspondentes para os aparelhos B e C são iguais a 0.005 e 0.002, respectivamente.
No final de um dia de laboração retira-se, ao acaso, uma pilha da produção da fábrica.
a) Determine a probabilidade da pilha ser defeituosa.
b) Se a pilha é defeituosa, qual o aparelho que com maior probabilidade a terá produzido?
c) Qual a probabilidade de não haver pilhas defeituosas na produção diária da fábrica?

II

Seja X uma variável aleatória real de lei normal de parâmetros m e σ, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$.
1. Prove que a lei de X é simétrica relativamente a m.
2. Mostre que a variável aleatória $Z = \dfrac{X - m}{\sigma}$ segue a lei normal centrada e reduzida.
3. Prove que a função de repartição de Z, F_Z, verifica

$$F_Z(x) = 1 - F_Z(-x), x \in \mathbb{R}.$$

(v.p.f.)

III

Seja (X,Y) um vector aleatório real definido sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, absolutamente contínuo e tal que a função densidade da variável aleatória marginal X é dada por

$$f_X(x) = \tfrac{1}{2}\, \mathbb{I}_{[-1,1]}(x), x \in \mathbb{R}.$$

1. Determine a função de repartição da variável aleatória X^2.

2. Mostre que $E\left(X^k\right) = \begin{cases} 0, & k \text{ ímpar} \\ \frac{1}{k+1}, & k \text{ par} \end{cases}$.

3. Suponha que a função densidade conjunta de (X,Y) é definida por

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1+xy}{4}, & |x| \leq 1, |y| \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a) Prove que as variáveis X e Y são identicamente distribuídas.
b) Prove que as variáveis X e Y não são independentes.
c) Calcule $P\left(X^2 \leq u, Y^2 \leq v\right), (u,v) \in [0,1] \times [0,1]$.
d) Prove que as variáveis X^2 e Y^2 são independentes.
e) Sabendo que $E(XY^2) = 0$, calcule a esperança matemática e a matriz de variâncias-covariâncias do vector $(X^2, Y^2, X+1)$.

Nota: A variável aleatória real X segue uma lei normal de parâmetros m e σ, $m \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+$, se é absolutamente contínua de densidade

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right], x \in \mathbb{R}.$$

Cotação:

I. 6.25 valores
II. 4.0 valores
III. 9.75 valores.