Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Probabilidades
Exame

Duração: 2h 30m 3 - 1 - 2001

Observações:

1. Tenha em atenção a nota apresentada no final do enunciado.
2. A resolução completa dos problemas inclui a justificação do raciocínio utilizado.
3. Durante o decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos.

I

A empresa *Spectrum* vende computadores a três tipos de clientes: instituições, empresas e particulares.

Registos efectuados permitem afirmar que 40% das vendas de computadores são feitas às instituições. Além disso sabe-se que, dos computadores vendidos às empresas, 5% apresentam um defeito e 2% apresentam mais do que um defeito. Relativamente ao grupo constituído pelas instituições e particulares, 4% dos computadores vendidos apresentam um defeito e 1% apresenta mais do que um defeito. Sabe-se ainda que 6% dos computadores vendidos apresenta *pelo menos um defeito*.

1. Calcule a percentagem de vendas de computadores às empresas.

2. Qual a probabilidade de um computador que apresenta mais do que um defeito ser vendido a uma empresa?

3. Qual é, com uma probabilidade quando muito igual a 0.95, o número mínimo de instituições que estão incluídas num grupo de 20 clientes que adquirem computadores à *Spectrum*?

II

Seja X uma variável aleatória real seguindo a lei de Poisson de parâmetro $\lambda, \lambda \in \mathbb{R}^+$.

1. Prove que a função característica de X é definida por $\Phi_X(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}}$, $t \in \mathbb{R}$.

2. Seja $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de variáveis aleatórias reais independentes seguindo a lei de X.

a) Identifique a lei de $Z_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, $n \in \mathbb{N}$.

? b) Prove que $\frac{Z_n}{n}$ converge em probabilidade para λ, quando n tende para $+\infty$.

c) O que pode afirmar sobre a convergência em lei da sucessão de variáveis aleatórias

$$\frac{1}{\sqrt{n\lambda}} (Z_n - n\lambda), \; n \in \mathbb{N},$$

quando n tende para $+\infty$?

3. O número de clientes da empresa *Spectrum* durante um dia é uma variável aleatória real X seguindo a lei de Poisson de valor médio 8. Admite-se que as variáveis correspondentes a dias diferentes são independentes.

a) Calcule a probabilidade de a empresa ter, durante um dia, pelo menos 6 clientes.

b) Calcule a probabilidade de a *Spectrum* ter, em 32 dias de abertura, pelo menos 252 clientes.

(v.p.f.)

III

Seja (X, Y) um vector aleatório real bidimensional definido sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, absolutamente contínuo, com função densidade de probabilidade definida por

$$f(x, y) = (x + y)\mathbb{I}_{[0,1]^2}(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1) Prove que as variáveis aleatórias X e Y são identicamente distribuídas com função densidade

$$g(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \mathbb{I}_{[0,1]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

2) Determine a função de repartição de X.
3) Calcule o valor da função de repartição de (X, Y) no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Serão X e Y independentes?
4) Calcule $P(X \geq 2Y)$.
5) Seja Z uma v.a.r. definida sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, independente de X e tal que

$$P(Z \leq z) = (1 - e^{-z})\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(z), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Determine a expressão analítica da função de repartição da v.a.r. $M = \max(X, Z)$.

Nota. Uma variável aleatória real X segue a lei de Poisson de parâmetro $\lambda, \lambda \in \mathbb{R}^+$, se a sua lei de probabilidade, P_X, é discreta de suporte $\mathbb{N}_0$ e tal que

$$P_X(\{x\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, x \in \mathbb{N}_0.$$

Tem-se $E(X) = V(X) = \lambda$.

Cotação

I. 6 valores
II. 8 valores
III. 6 valores.