Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Probabilidades
Exame

Duração: 2h 30m 7 - 2 - 2001

Observações:
1. Tenha em atenção as notas apresentadas no final do enunciado.
2. A resolução completa dos problemas inclui a justificação do raciocínio utilizado.
3. Durante o decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos.

I

A. Sendo $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade e $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de $\mathcal{A}$, prove que:

? 1. $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k), \quad n \in \mathbb{N}.$

? 2. $P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$

B. Uma empresa têxtil, dedicada à produção de camisolas, vende 60% da sua produção no mercado interno e exporta a produção restante, em partes iguais, para Espanha e para França. As camisolas fabricadas pela empresa são de dois tipos: pura lã ou fibra. Sabe-se que, das camisolas exportadas para o mercado francês, 60% são de pura lã enquanto que para o mercado espanhol aquela percentagem é de 40%. Sabe-se ainda que, das camisolas em fibra, 60% são destinadas ao mercado interno.
Retira-se, ao acaso, uma camisola da produção da empresa.
1. Prove que a probabilidade da camisola ser de pura lã é 0.5.
2. Será a venda no mercado interno independente do facto da camisola ser de pura lã?
3. O peso (expresso em *gramas*) das camisolas de lã produzidas pela empresa é representado por uma variável aleatória real (v.a.r.) X seguindo uma lei normal de média 300 e desvio padrão σ, $\sigma > 0$. Sabe-se que 2.28% das camisolas de lã pesam menos de $250g$.
a) Verifique que o desvio padrão de X é $25g$.
b) O preço de venda destas camisolas está fixado em 0.1 *euros* por grama.
(i) Demonstre que o preço de venda de uma camisola de lã é uma variável aleatória de lei normal.
(ii) Determine a probabilidade do preço de venda de 25 destas camisolas, com pesos considerados independentes, ser superior a 730 *euros*.

II

Seja (X, Y) um vector aleatório real definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, absolutamente contínuo com função densidade definida por

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \tfrac{1}{4}\left(1 - x^3 y\right) \mathbb{I}_{[-1,1]^2}(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Calcule $P\left[\max\left(9X^2, Y+1\right) \geq 1\right]$.
2. Prove que a v.a.r. X segue a lei uniforme no intervalo $[-1, 1]$.

(v.p.f.)

? ~~3~~. Sabendo que X e Y seguem a mesma lei, obtenha a matriz de variâncias-covariâncias do vector $(X, Y+3)$.

? ~~4~~. Determine a função de repartição da variável aleatória real $Z = \dfrac{1}{X}$.

III

Considere uma v.a.r. X definida sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, discreta, com função de probabilidade dada por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in \{0,2\} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\{0,2\}. \end{cases}$$

~~1~~. Determine a função característica de X.

~~2~~. Seja $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de v.a.r. definidas sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, independentes e identicamente distribuídas com X.

~~a)~~ Deduza a função característica da v.a.r. $V = aX_1 + bX_2 + c$, onde a, b, $c \in \mathbb{R}$.

? b) Analise a convergência em lei, quando n tende para $+\infty$, da sucessão de v.a.r.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i - \sqrt{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Notas

1. A v.a.r. X segue a lei normal de parâmetros m e σ, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$, se é absolutamente contínua de densidade dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right], \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. A v.a.r. Y segue a lei uniforme no intervalo $[a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, se é absolutamente contínua de densidade

$$f_Y(y) = \frac{1}{b-a} \mathbb{I}_{[a,b]}(y), \quad y \in \mathbb{R},$$

tendo-se $V(Y) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Cotação

I 10.0 valores
II 6.0 valores
III 4.0 valores.