Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Exame de Probabilidades

Duração: 2h 30m — 16 - 10 - 2002

Observações:

1. Tenha em atenção a nota apresentada no final do enunciado.
2. Na resolução das questões deverá justificar o raciocínio utilizado e apresentar todos os cálculos efectuados.

I

1. Considere um qualquer espaço probabilizável $(\Omega, \mathcal{A})$ e seja P uma função definida sobre $\mathcal{A}$, com valores em $[0,1]$, aditiva e tal que $P(\Omega) = 1$.

a) Prove que $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$, para todos $A, B \in \mathcal{A}$. Deduza o valor de $P(\emptyset)$.

b) Diga em que condições será P uma probabilidade sobre $(\Omega, \mathcal{A})$.

c) Suponha que para toda a sucessão $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{A}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subset A_n \quad \text{e} \quad \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \emptyset$$

se tem $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$. Prove que P é uma probabilidade sobre $(\Omega, \mathcal{A})$.

2. Suponha que é efectuado o lançamento, em simultâneo, de três dados equilibrados com as faces numeradas de 1 a 6, registando-se os números das faces que ficam voltadas para cima.

a) Indique o modelo de probabilidade associado a esta experiência aleatória.

b) Considere os acontecimentos

A: "Os números registados são todos diferentes"

B: "Os números registados são todos iguais"

(i) Calcule a probabilidade de cada um dos acontecimentos A e B.

(ii) Serão os acontecimentos A e B independentes?

(iii) Sabendo que pelo menos dois dos números registados são iguais, qual a probabilidade de que os três números registados sejam iguais?

(iv) Analise e comente a afirmação: "Dois acontecimentos incompatíveis nunca podem ser independentes".

v.p.f.

II

1. Considere uma lei de probabilidade sobre $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2)$ absolutamente contínua de densidade f tal que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = g(x)h(y),$$

onde g e h são densidades de probabilidade sobre $\mathbb{R}$.

a) Mostre que f é a densidade de um vector aleatório bidimensional (X,Y) de margens independentes e absolutamente contínuas.

b) Suponha que (X,Y) é um vector aleatório bidimensional absolutamente contínuo de densidade f tal que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \frac{2}{\pi^2(1+x^2)} \mathbb{I}_{]-1,1[\times[\pi,2\pi]}(x,y).$$

(i) Utilize a propriedade expressa na alínea a) para concluir que X e Y são independentes e identificar as respectivas leis.

(ii) Prove que o vector aleatório real (XY, Y) admite valor médio e indique o seu valor.

2. Considere a variável aleatória real X que descreve o tempo que decorre (em horas) entre duas chegadas consecutivas a um consultório médico. Sabe-se que X segue a lei de função característica

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \Phi(t) = \frac{4}{4-it}.$$

Além disso, sabe-se que as chegadas ao referido consultório são independentes entre si.

a) Prove que X admite momentos de todas as ordens e calcule os respectivos valor médio e variância.

b) Defina a variável aleatória real Z que descreve o tempo que decorre entre quaisquer n chegadas consecutivas e determine a sua lei.

c) Indique quantos minutos decorrem, em média, entre 6 chegadas consecutivas ao referido consultório.

Cotação

I-1. 4.5 valores

2. 4.5 valores

II-1. 6.0 valores

2. 5.0 valores