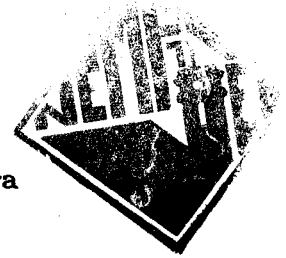


Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Exame de Probabilidades



Duração: 2h 30m

16 - 10 - 2002

Observações:

1. Tenha em atenção a nota apresentada no final do enunciado.
2. Na resolução das questões deverá justificar o raciocínio utilizado e apresentar todos os cálculos efectuados.

I

1. Considere um qualquer espaço probabilizável (Ω, \mathcal{A}) e seja P uma função definida sobre \mathcal{A} , com valores em $[0, 1]$, aditiva e tal que $P(\Omega) = 1$.

- a) Prove que $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$, para todos $A, B \in \mathcal{A}$. Deduza o valor de $P(\emptyset)$.
- b) Diga em que condições será P uma probabilidade sobre (Ω, \mathcal{A}) .
- c) Suponha que para toda a sucessão $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de \mathcal{A} tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n \text{ e } \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \emptyset$$

se tem $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = 0$. Prove que P é uma probabilidade sobre (Ω, \mathcal{A}) .

2. Suponha que é efectuado o lançamento, em simultâneo, de três dados equilibrados com as faces numeradas de 1 a 6, registando-se os números das faces que ficam voltadas para cima.

- a) Indique o modelo de probabilidade associado a esta experiência aleatória.
- b) Considere os acontecimentos
A: "Os números registados são todos diferentes"
B: "Os números registados são todos iguais"
 - (i) Calcule a probabilidade de cada um dos acontecimentos A e B.
 - (ii) Serão os acontecimentos A e B independentes?
 - (iii) Sabendo que pelo menos dois dos números registados são iguais, qual a probabilidade de que os três números registados sejam iguais?
 - (iv) Analise e comente a afirmação: "Dois acontecimentos incompatíveis nunca podem ser independentes".

v.p.f.

II

1. Considere uma lei de probabilidade sobre $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2)$ absolutamente contínua de densidade f tal que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = g(x)h(y),$$

onde g e h são densidades de probabilidade sobre \mathbb{R} .

- a) Mostre que f é a densidade de um vector aleatório bidimensional (X, Y) de margens independentes e absolutamente contínuas.
- b) Suponha que (X, Y) é um vector aleatório bidimensional absolutamente contínuo de densidade f tal que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \frac{2}{\pi^2 (1 + x^2)} \mathbb{I}_{]-1, 1[\times]\pi, 2\pi[}(x, y).$$

- (i) Utilize a propriedade expressa na alínea a) para concluir que X e Y são independentes e identificar as respectivas leis.
- (ii) Prove que o vector aleatório real (XY, Y) admite valor médio e indique o seu valor.

2. Considere a variável aleatória real X que descreve o tempo que decorre (em horas) entre duas chegadas consecutivas a um consultório médico. Sabe-se que X segue a lei de função característica

$$\forall t \in \mathbb{R}, \Phi(t) = \frac{4}{4 - it}.$$

Além disso, sabe-se que as chegadas ao referido consultório são independentes entre si.

- a) Prove que X admite momentos de todas as ordens e calcule os respectivos valor médio e variância.
- b) Defina a variável aleatória real Z que descreve o tempo que decorre entre quaisquer n chegadas consecutivas e determine a sua lei.
- c) Indique quantos minutos decorrem, em média, entre 6 chegadas consecutivas ao referido consultório.

Cotação

I-1. 4.5 valores

2. 4.5 valores

II-1. 6.0 valores

2. 5.0 valores