Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Exame de Probabilidades

Duração: 2h 30m 10 - 01 -

Observações:

1. Tenha em atenção a nota apresentada no final do enunciado.
2. Na resolução das questões deverá justificar o raciocínio utilizado e apresentar todos os cálculos efectuados.

I

1. Considere um qualquer espaço probabilizável $(\Omega, \mathcal{A})$ e seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de acontecimentos de $\mathcal{A}$ tais que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}.$$

a) Defina função de probabilidade P sobre $(\Omega, \mathcal{A})$.

b) Suponha que P é uma probabilidade sobre $(\Omega, \mathcal{A})$. Prove que a sucessão $(P(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tem limite e determine o seu valor.

c) Considere agora P uma probabilidade sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, onde $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$, tal que $P(\{0\}) = 0$.

(i) Diga em que condições será P uma probabilidade simétrica em relação à origem.

(ii) Prove que, nas condições da alínea (i), $P(]-\infty, 0[) = \frac{1}{2}$. Indique, justificando convenientemente, uma mediana de P. 0

2. Em determinada estação dos correios existem três postos de atendimento, com actividades bem especificadas e independentes umas das outras, designados por *atendimento geral*, *encomendas* e *envio de vales*. As chegadas a cada um destes postos num certo intervalo de tempo são independentes entre si e bem descritas por leis de Poisson com parâmetros respectivamente iguais a 10, 3 e 2.

a) Seja X_1 a variável aleatória real (v.a.r.) que designa o número de chegadas ao posto de *atendimento geral* naquele período de tempo. Prove que a função característica de X_1 é definida por $\Phi(t) = e^{10(e^{it}-1)}$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Usando a alínea anterior, obtenha o número médio de chegadas ao posto de *atendimento geral*. 10

c) Calcule a probabilidade do número de chegadas ao posto de *atendimento geral*, X_1, pertencer ao intervalo

$$\left[E(X_1) - \sqrt{V(X_1)}, E(X_1) + \sqrt{V(X_1)}\right],$$

onde $E(X_1)$ e $V(X_1)$ designam, respectivamente, a esperança matemática e a variância da v.a.r. X_1.

d) Determine a lei da v.a.r. Y que descreve o número de chegadas àquela estação dos correios naquele período de tempo. $Y \sim \mathcal{P}(15)$

e) Qual o número mínimo de pessoas que, com probabilidade quando muito igual a 0.95, chegam à referida estação dos correios em tal intervalo de tempo? 10

f) Sabendo que chegam pelo menos 12 pessoas àquela estação naquele período, qual a probabilidade de 8 delas irem para o posto de *atendimento geral*?

v.p.f.

II

1. Seja (X, Y) um vector aleatório real bidimensional definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, absolutamente contínuo de densidade f. Prove que X é uma v.a.r. absolutamente contínua e indique uma versão da sua densidade.

2. Suponha que o vector aleatório (X, Y) admite como densidade a função

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \frac{1}{8\pi x} \exp\left(-\frac{(\log x)^2}{8}\right) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+ \times [-\sqrt{2\pi}, \sqrt{2\pi}]}(x, y).$$

a) Determine a densidade marginal de X. $\frac{\sqrt{2\pi}}{4\pi} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{(\log x)^2}{8}\right) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$

b) Serão X e Y variáveis aleatórias reais independentes? Justifique a sua resposta. Sim

c) Prove que $Z = \log X$ segue a lei normal centrada, de variância 4.

d) Calcule $P((Z, Y) \in [0, 2] \times [-1, 2])$. $0.3413 \left(\frac{3 - 2\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{2\pi}}\right)$

e) Obtenha a matriz de variâncias-covariâncias de (Z, Y). $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{2\pi}{3} \end{bmatrix}$

Nota.

1. Uma variável aleatória real X segue a lei de Poisson de parâmetro λ, $\lambda > 0$, se a sua lei de probabilidade é discreta de suporte $\mathbb{N}_0$ e função de probabilidade

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \mathbb{I}_{\mathbb{N}_0}(x).$$

2. Uma variável aleatória real X segue a lei normal de parâmetros m e σ, $m \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$, se a sua lei de probabilidade é absolutamente contínua de função densidade

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - m)^2\right).$$

Além disso, $E(X) = m$ e $V(X) = \sigma^2$.

Cotação

I-1. 5.0 valores

2. 6.5 valores

II-1. 2.0 valores

2. 6.5 valores