Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Exame de Probabilidades

Duração: 2h 30m 13 - 02 - 2002

Observação: Na resolução das questões deverá justificar o raciocínio utilizado e apresentar todos os cálculos efectuados.

I

1. Considere um qualquer espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de acontecimentos de $\mathcal{A}$.

   a) Diga em que condições será $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de acontecimentos independentes.

   b) Seja $\left(A_{k(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ uma subsucessão de uma sucessão $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de acontecimentos de $\mathcal{A}$ independentes. Prove que

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_{k(i)}\right) = \prod_{i=1}^{\infty} P\left(A_{k(i)}\right).$$

   c) Considere a experiência aleatória $\mathcal{E}$: "lançamento sucessivo, com observação da face exposta, de uma moeda equilibrada".

   (i) Identifique o acontecimento A_n : "ocorrência de cara no lançamento de ordem n, $n \in \mathbb{N}$" e calcule a sua probabilidade.

   (ii) Mostre que o acontecimento B : "saída de coroa nalgum lançamento de ordem par" é quase certo. Que poderá afirmar sobre tal ocorrência nalgum lançamento de ordem ímpar?

2. Numa fábrica de material electrónico, a produção de determinado tipo de componentes é assegurada por duas máquinas, A e B, sendo de 40% a produção da máquina A. Qualquer uma das máquinas fabrica peças com defeito, sabendo-se que é de 2% a percentagem de componentes defeituosas produzidas pela máquina B. Além disso, a máquina A produz 25% das componentes defeituosas.

   a) Calcule a probabilidade de uma qualquer das componentes desse tipo, produzidas na fábrica, ser defeituosa.

   b) Com o objectivo de detectar componentes defeituosas, foi desenvolvido um teste rápido, mas não completamente fiável, já que em 90% dos casos indica que a componente é defeituosa, quando ela é efectivamente defeituosa, enquanto que em 99% dos casos indica que a componente está em bom estado, quando tal efectivamente acontece. Sabendo que o teste indicou como defeituosa uma componente escolhida ao acaso na produção da fábrica, calcule a probabilidade dessa componente ser, de facto, defeituosa.

   c) O peso, em *gramas*, das componentes produzidas pelas máquinas A e B é uma variável aleatória real normalmente distribuída. Sabendo que, daquelas componentes, 10.56% têm peso superior a $102.5\,g$ e 6.68% pesam quando muito $97\,g$, determine o peso médio das referidas componentes.

v.p.f.

II

1. Sejam X e Y variáveis aleatórias reais (v.a.r.) definidas sobre um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, absolutamente contínuas, independentes e admitindo valores médios $E(X)$ e $E(Y)$, respectivamente. Prove que $Z = XY$ é uma v.a.r. com valor médio e que se tem $E(Z) = E(X)\,E(Y)$.

2. Seja X uma v.a.r. absolutamente contínua definida sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ com função densidade

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x^3}, & x > 1 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Calcule o valor médio de X.

b) Mostre que $E(X^2)$ não existe. Que pode concluir sobre a existência dos momentos (simples) de X?

c) Considere a v.a.r. $Z = e^{2X}$. Obtenha a função de distribuição de Z.

d) Seja Y uma variável aleatória real definida sobre o mesmo espaço de probabilidade, independente de X, absolutamente contínua e com função densidade

$$f_Y(y) = \mathbb{I}_{[0,1]}(y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

i) Calcule $P(\max(e^{2X}, 4Y) \geq e)$.

ii) Mostre que existe $cov(X,Y)$ e indique o seu valor. Tire conclusões sobre a existência da matriz de variâncias-covariâncias do vector (X,Y).

Cotação

I-1. 5.5 valores

2. 4.5 valores

II-1. 2.5 valores

2. 7.5 valores