Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Probabilidades

Duração: 2h 30m 14

Observação: Na resolução das questões deverá justificar o raciocínio utilizado e apresentar t
os cálculos efectuados.

I

1. Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ n variáveis aleatórias reais (v.a.r.) definidas sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, independentes e identicamente distribuídas com uma lei normal de valor médio m e variância σ^2 ($m \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$).

a) Prove que $U_i = \frac{X_i - m}{\sigma}$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, segue a lei normal centrada e reduzida.

b) Sendo F a função de distribuição da lei normal centrada e reduzida, mostre que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{X_i < a_i\}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - F\left(\frac{a_i - m}{\sigma}\right)\right), \ \forall (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n.$$

2. Num modelo de simulação das actividades de um determinado porto marítimo situado na Europa, uma das variáveis aleatórias a considerar corresponde à diferença, em dias, entre a data efectiva de chegada dos navios provenientes dos E.U.A. e a data prevista no respectivo horário. Um estudo estatístico, realizado numa época do ano em que as condições meteorológicas são habitualmente adversas, permitiu concluir que o comportamento dessa variável é bem descrito por uma lei normal de média 0.5 e desvio padrão 1.

a) Calcule a probabilidade de que um qualquer navio proveniente dos E.U.A. naquela época do ano chegue atrasado ao referido porto marítimo.

b) Num determinado período de tempo da época do ano em causa são esperados no porto três navios provenientes dos E.U.A.. Supondo que navegam independentemente uns dos outros, qual é a probabilidade de que pelo menos um deles não ultrapasse o horário previsto para a chegada em mais do que meio dia?

c) Se, em determinado momento, o comandante de um navio em viagem dos E.U.A. para o referido porto enviar uma mensagem informando que vai chegar antes do horário previsto, sendo tal adiantamento inferior a um dia, qual é a probabilidade de que chegue adiantado mais de meio dia?

d) Sabe-se que, na referida época do ano, a probabilidade de um qualquer dos navios provenientes dos E.U.A. e com destino ao porto marítimo em causa se atrasar quando surge uma tempestade na sua viagem é 0.8, enquanto que, quando tal não acontece, a probabilidade de haver atrasos é 0.3. Determine a probabilidade de que, nessa época do ano, surja uma tempestade numa daquelas viagens.

II

1. Seja $(X_1, X_2, ..., X_n)$ um vector aleatório real (ve.a.r.) de dimensão n definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Defina a função de distribuição, F, de $(X_1, X_2, ..., X_n)$ e prove que é uma função monótona (relativamente à relação de ordem usual em $\mathbb{R}^n$) e limitada.

v.p.f.

b) Designando por F_j a função de distribuição da margem X_j, $j \in \{1, 2, ..., n\}$, mostre que

$$\forall y \in \mathbb{R},\ F_j(y) = \lim_{k \to +\infty} F(k, ..., (j-1)k, y, (j+1)k, ..., nk).$$

2. Considere um ve.a.r. (X, Y) cuja lei de probabilidade é caracterizada pela função densidade

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{9}, & \text{se } -a < x < 2a,\ -a < y \leq x \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

onde a é um parâmetro real positivo. Nestas condições, a função densidade da v.a.r. X é definida por

$$f_X(x) = \frac{2}{9}(x+1)\mathbb{I}_{]-a,2a[}(x),\quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Calcule o valor de a e determine a função de distribuição de X.

b) Obtenha a mediana da distribuição da v.a.r. X.

c) Será a v.a.r. Y identicamente distribuída com X?

d) Calcule o valor da função de distribuição de (X, Y) no ponto $\left(a, \frac{a}{2}\right)$. Serão X e Y independentes?

e) Determine o valor médio da v.a.r. $Z = XY$.

Cotação

I **1.** 3.0

2. 5.5

II **1.** 3.5

2. 8.0