



Exame de Probabilidades

Duração: 2h 30m

14-01-04

Observação: Na resolução das questões deverá justificar o raciocínio utilizado e apresentar todos os cálculos efectuados.

I

1. Considere um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{A}, P) e seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de acontecimentos independentes deste espaço.

a) Prove que o acontecimento $\bigcup_{i=1}^r A_i$ é independente de qualquer acontecimento A_n tal que $n > r$.

b) Mostre que A_i^c é independente de A_j^c , para todos $i, j \in \mathbb{N}$ tais que $i \neq j$.

c) Conclua que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P\left(\bigcap_{j=1}^n A_j^c\right) = \prod_{j=1}^n P(A_j^c).$$

Obs. Na resolução das questões anteriores poderá necessitar do seguinte resultado: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \sum_{i=1}^n P(B_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(B_i \cap B_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(B_i \cap B_j \cap B_k) + \dots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^n B_i\right),$$

com B_1, \dots, B_n acontecimentos de um qualquer espaço de probabilidade.

2. Numa determinada empresa de lacticínios estão preparados para serem distribuídos no mercado lotes contendo embalagens de cada um dos seguintes produtos: manteiga, iogurtes e natas. O número de tais lotes é, respectivamente, igual a 3000, 6000 e 1000. O sector de controlo da produção sabe que dos lotes com produtos fora do prazo de validade $\frac{2}{3}$ são dos que contêm embalagens de natas e ainda que não existem lotes com pacotes de manteiga fora do prazo de validade.

a) Qual a percentagem de lotes com iogurtes entre aqueles que contêm produtos fora do prazo de validade?

b) Sabendo também que nos lotes contendo iogurtes existem 3% que têm iogurtes fora do prazo de validade, determine a percentagem dos referidos lotes para distribuição que contêm produtos fora do prazo de validade.

c) Qual a percentagem de lotes com embalagens de natas fora do prazo de validade?

d) Determinada empresa de distribuição exige fazer uma inspecção à qualidade dos lotes antes de aceitar a sua distribuição. Para tal retira ao acaso e com reposição um certo número de lotes do conjunto inicialmente referido, recusando-se a assumir a entrega se encontrar em tal amostra algum lote com produtos fora do prazo de validade. Determine o número de lotes que bastará observar para que a probabilidade da empresa não aceitar o serviço seja superior a 30%.

Obs. Nota-se que $\ln 0.7 = -0.357$ e $\ln 0.946 = -0.056$.

v.s.f.f.

II

1. Considere um vector aleatório real (ve.a.r.) (X, Y) definido sobre um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{A}, P) .

- a) Diga em que condições será (X, Y) um ve.a.r. absolutamente contínuo.
- b) Suponha que (X, Y) é absolutamente contínuo e de componentes independentes. Indique uma condição sob a qual a variável aleatória real (v.a.r.) $Z = XY$ admita valor médio e, sob essa condição, obtenha o seu valor.

2. Num processo de fabrico de peças de alumínio a utilizar na construção civil é usada uma máquina A que corta automaticamente peças de comprimento previamente fixado. Sabe-se que neste processo a medida das peças pode afastar-se da previamente fixada por um valor (em centímetros) bem descrito por uma v.a.r. X (erro da máquina A) absolutamente contínua de densidade

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{3}{2}x^2(1-x)\mathbb{I}_{]-1,1]}(x).$$

- a) Determine a função de distribuição da v.a.r. X .
- b) Determine a lei de probabilidade da v.a.r. $Y = |X|$ (valor absoluto do erro da máquina A) e obtenha o correspondente valor médio.
- c) Seja Z a v.a.r. que descreve o erro cometido por uma outra máquina B com as mesmas características de A e funcionando independentemente desta.
 - (i) Determine a lei de (X, Z) .
 - (ii) Calcule, caso exista, $E(YZ)$.
 - (iii) Determine a probabilidade de que as peças cortadas, quer pela máquina A quer pela B, não se afastem dos comprimentos desejados mais do que 0.5 cm.
 - (iv) Determine a probabilidade de que o erro cometido pela máquina A seja inferior ao da máquina B.

Cotação

I-1. 4.5 valores

2. 4.5 valores

II-1. 2.5 valores

2. 8.5 valores