DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Exame de Probabilidades

Duração: 2h 30m 06-0

Observação: Na resolução das questões deverá justificar o raciocínio utilizado e apresentar to os cálculos efectuados.

I

1. Considere um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de acontecimentos deste espaço. Considere a sucessão $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$B_1 = A_1 \text{ e } B_n = A_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k, \ \forall n \geq 2.$$

a) Justifique a afirmação "$(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de acontecimentos de $\mathcal{A}$ dois a dois incompatíveis".

b) Prove que $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

c) Deduza que $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

2. Certa epidemia de gripe pode ser provocada por um e um só de três vírus aqui designados por A, B e C. Numa região em que tal epidemia se manifestou, as autoridades sanitárias atribuíram uma probabilidade 0.6 de que esta tenha sido devida ao vírus A. Por outro lado, registos anteriores referem que a epidemia originada pelo vírus A atinge 10% das pessoas, pelo vírus B atinge 60% e atribuem ainda uma contaminação quase certa de toda a população ao vírus C. Além disso, dados da Organização Mundial de Saúde indicam que é de $\frac{1}{6}$ a probabilidade de que um indivíduo com tal gripe tenha sido contaminado pelo vírus A.

a) Prove que 36% dos indivíduos da referida região contraíram a doença.

b) Qual a probabilidade de que a epidemia daquela região tenha sido originada pelo vírus B? E pelo vírus C?

c) Supondo que foram sendo observados indivíduos de tal região de modo independente e sempre nas mesmas condições, determine a probabilidade de ter sido necessário observar pelo menos 20 indivíduos até ocorrer um que tivesse contraído a gripe.

II

1. Considere um vector aleatório real (ve.a.r.) (X, Y), definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, discreto de função de probabilidade p e suporte S.

a) Prove que X é uma variável aleatória real (v.a.r.) discreta e indique a respectiva função de probabilidade p_1. Que pode afirmar sobre a lei da v.a.r. Y?

b) Prove que se (X, Y) é de componentes independentes então

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ p(x, y) = p_1(x)\, p_2(y),$$

onde p_1 e p_2 são, respectivamente, as funções de probabilidade de X e de Y.

v.s.f.f.

2. Suponha que X e Y são v.a.r. descrevendo, respectivamente, o número de veículos a gasolina e a gasóleo que chegam, num determinado período de tempo, a uma estação de serviço para abastecer de combustível. Sabe-se que X e Y seguem leis de Poisson de parâmetros, respectivamente, iguais a 10 e a 6 e que as chegadas dos veículos são independentes entre si.

a) Determine a probabilidade de que nesse período de tempo cheguem pelo menos 5 veículos para abastecer de gasóleo e no máximo 8 para abastecer de gasolina.

b) Calcule o valor médio do ve.a.r. (X, Y) e indique o número médio de veículos que chegam, naquele período, à estação de serviço para abastecer.

c) Determine a lei da v.a.r. Z que representa o número de veículos que chegam à respectiva estação de serviço para abastecer, durante aquele período.

d) Suponha agora que T é a v.a.r. que descreve o intervalo de tempo (em minutos) que decorre entre duas chegadas consecutivas de veículos à estação de serviço para abastecer de combustível. Sabe-se que T segue a lei exponencial de parâmetro igual a $\frac{1}{2}$.

(i) Calcule o tempo médio que decorre entre duas quaisquer chegadas consecutivas de veículos.

(ii) Determine a de modo que, em 50% dos casos, o tempo T entre duas chegadas consecutivas não ultrapasse a. Identifique o valor obtido.

Cotação

I-1. 4.5 valores

2. 5.0 valores

II-1. 3.0 valores

2. 7.5 valores