DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

**Exame de Probabilidades**

Duração: 2h 30m 17-0

**Observação:** Na resolução das questões deverá justificar o raciocínio utilizado e apresentar todos os cálculos efectuados.

**1.** Considere um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de acontecimentos de $\mathcal{A}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}.$$

**a)** Prove que existe o acontecimento $B = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ e identifique-o.

**b)** Que pode concluir sobre a convergência da sucessão $(P(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$?

**c)** Seja $X$ uma variável aleatória real (v.a.r.) definida sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e de função de distribuição (f.d.) $F$.

**(i)** Determine $\lim\limits_{n\to\infty} F\left(x - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

**(ii)** Justifique a seguinte afirmação verdadeira
"A f.d. de $X$ é contínua desde que $\lim\limits_{n\to\infty} F\left(x - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = F(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$".
Nestas condições, que pode concluir sobre a lei de $X$?

**2.** Determinado barómetro, que se limita a indicar "sol" ou "chuva", falha com alguma frequência. De facto, tem-se verificado que ele prevê "sol" em 10% dos dias chuvosos e "chuva" em 30% dos dias com sol. Considere que o barómetro está localizado numa região em que se sabe que 80% dos dias são de sol e os restantes 20% são de chuva.

**a)** Qual a probabilidade de, num qualquer dia, o barómetro errar a previsão?

**b)** Determine a probabilidade de estar sol num dia para o qual a previsão do barómetro é de chuva.

**c)** Calcule a probabilidade de um determinado dia ser de sol ou o barómetro indicar sol para esse dia.

**d)** Sabendo que em 1% dos dias de sol a temperatura naquela região é superior a $38\,°C$, calcule a probabilidade de que, em 60 dias de sol, haja quando muito 1 dia em que a temperatura exceda tal valor.

**3.** O rendimento anual (em milhares de euros) dos agricultores de determinada região e a duração (em semanas) das férias desses agricultores são respectivamente descritos por v.a.r., $X$ e $Y$, tais que o vector aleatório real (ve.a.r.) $(X, Y)$ é absolutamente contínuo com densidade $f$ definida por

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,x} \exp\left(-\frac{25}{2}(\ln x - 3)^2\right) \mathbb{I}_{]0,+\infty[\times[0,5]}(x,y).$$

**a)** Determine a função densidade que caracteriza a distribuição do rendimento anual dos agricultores da referida região.

**b)** Serão $X$ e $Y$ v.a.r. independentes?

v.s.f.f.

**c)** Prove que a v.a.r. $Z = \ln X$ segue a lei normal de média 3 e desvio padrão 0.2.

**d)** Obtenha a matriz de variâncias-covariâncias do ve.a.r. $(Z, Y)$.

**e)** O Sr. José e o Sr. António são dois agricultores amigos daquela região com rendimentos independentes. Qual a probabilidade de pelo menos um deles usufruir um rendimento anual compreendido entre $e^{2.9}$ e $e^{3.2}$ mil euros?

**4.** Considere uma v.a.r. $X$ definida sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

**a)** Defina função característica, $\Phi$, da v.a.r. $X$ e prove que $\Phi$ existe qualquer que seja a lei da v.a.r. $X$.

**b)** Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ $n$ v.a.r. definidas sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ independentes e identicamente distribuídas com $X$.

**(i)** Recorrendo à função característica do ve.a.r. $(X_1, X_2, ..., X_n)$, prove que a função característica da v.a.r. $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ é dada por

$$\Phi_Y(t) = \left[\Phi\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n.$$

**(ii)** Supondo que $X$ segue a lei exponencial de parâmetro $\lambda$ $(\lambda > 0)$, obtenha a lei de $Y$.

## Cotação

1. 4.5 valores
2. 4.5 valores
3. 7.5 valores
4. 3.5 valores