DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Exame de Probabilidades

Duração: 2h30m 14-09-05

Observação: A resolução completa das questões apresentadas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Considere um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de acontecimentos de $\mathcal{A}$, partição do conjunto Ω e tal que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(A_n) > 0.$$

a) Seja $k \in \mathbb{N}$, arbitrariamente fixo. Prove que a função $P(\cdot|\, A_k)$ definida sobre $\mathcal{A}$ por

$$P(B|\, A_k) = \frac{P(B \cap A_k)}{P(A_k)},\ B \in \mathcal{A},$$

é uma probabilidade sobre $(\Omega, \mathcal{A})$.

b) Prove que, para todo o acontecimento $C \in \mathcal{A}$ tal que $P(C) > 0$, se tem

$$P(A_k|\, C) = \frac{P(C|\, A_k)P(A_k)}{\sum_{n=1}^{+\infty} P(C|\, A_n)P(A_n)}.$$

2. Num processo de controlo de qualidade de determinado tipo de material regista-se o número de peças desse material até ocorrer a primeira com defeito. Sabendo que as peças foram sendo observadas independentemente umas das outras e sempre nas mesmas condições, designe por X a variável aleatória real (v.a.r.) que descreve aquele número aleatório.

a) Sendo p ($p \in]0,1[$) a probabilidade de ocorrência de material com defeito, prove que X é uma v.a.r. discreta de função de probabilidade

$$f(x) = p(1-p)^{x-1}\mathbb{I}_{\mathbb{N}}(x)\,.$$

b) Mostre que X admite valor médio e determine o seu valor.

c) Estudos estatísticos efectuados permitiram inferir o valor 50 para aquele valor médio. Determine, nestas condições, a probabilidade de ter sido necessário observar pelo menos 40 peças até ocorrer a primeira com defeito.

d) Sabendo que foi necessário observar pelo menos 40 peças até ocorrer a primeira com defeito, determine a probabilidade de tal número não exceder as 60 peças observadas.

3. Diga, justificando convenientemente, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

a) Seja Ω um conjunto finito e não vazio e sejam A e B dois subconjuntos de Ω. Designando por $\mathcal{P}(\Omega)$ o conjunto das partes de Ω, seja R uma qualquer probabilidade em $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Nestas condições, A e B são dois acontecimentos incompatíveis se e só se $R(A \cap B) = 0$.

b) Sejam A e B dois acontecimentos num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tais que $P(A)P(B) > 0$. Nestas condições, A e B são entre si independentes se e só se $P(A|\, B) = P(A)$ e $P(B|\, A) = P(B)$.

v.s.f.f.

c) Sendo F a função de distribuição de uma probabilidade Q sobre o espaço $\mathbb{R}$ munido da σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$, tem-se que $F(1) = \lim_{n \to +\infty} Q(\left]-\infty, \frac{n}{n+1}\right])$.

d) Sendo X e Y duas v.a.r. admitindo momentos de 2^a ordem e sendo entre si não correlacionadas, tem-se que $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$.

4. Determinado programa inserido num *software* estatístico gera valores de uma v.a.r. X uniformemente distribuída num intervalo $]-a, a[$, com $a > 0$, arbitrariamente fixo.

a) Determine a função de distribuição de X e calcule a probabilidade de serem gerados valores do intervalo $\left]-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right[$.

b) Obtenha a amplitude do intervalo interquartil da v.a.r. X.

c) Designe-se por Y a v.a.r. que descreve o maior valor observado em quaisquer três corridas independentes do referido programa.

i. Mostre que a v.a.r. $Z = \frac{Y}{a}$ segue a lei de função de distribuição

$$F_Z(z) = \left(\frac{z+1}{2}\right)^3 \mathbb{I}_{]-1,1[}(z) + \mathbb{I}_{[1,+\infty[}(z).$$

ii. Determine o valor médio da v.a.r. Y.

Cotação:
1. 3.0
2. 6.0
3. 5.0
4. 6.0