Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Probabilidades

Duração: 2h30m 07-01-05

Observação: A resolução completa das questões apresentadas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Seja Ω um conjunto finito e não vazio e $\mathcal{P}(\Omega)$ o conjunto das partes de Ω.

a) Prove que a função P definida por

$$\forall A \subset \Omega,\ P(A) = \frac{\text{card}\,(A)}{\text{card}\,(\Omega)}$$

é uma probabilidade sobre $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

b) Mostre que toda a função de probabilidade sobre $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ que atribui igual probabilidade aos acontecimentos elementares coincide com P.

2. Num determinado país europeu foi realizada uma sondagem com o objectivo de recolher informações sobre a opinião dos cidadãos quanto à colaboração desse país numa intervenção militar de paz no Médio Oriente. Dos resultados de tal inquérito concluiu-se que 40% dos inquiridos são favoráveis a tal colaboração, 45% discordam totalmente dela e os restantes não têm opinião ou não querem responder. Relativamente à faixa etária, verificou-se que 60% dos inquiridos favoráveis a tal colaboração têm menos de 35 anos e que 55% dos inquiridos com 35 anos ou mais são-lhe totalmente desfavoráveis. Verificou-se ainda que 9% dos inquiridos com 35 anos ou mais não têm opinião ou não querem responder.

a) Obtenha a percentagem de indivíduos interrogados com 35 anos ou mais de idade.

b) Determine a percentagem de inquiridos que têm menos de 35 anos e são desfavoráveis à referida colaboração.

c) Sabendo que os inquéritos individuais foram realizados sempre nas mesmas condições e independentemente uns dos outros, considere a variável aleatória real (v.a.r.) X que descreve o número de indivíduos interrogados até ocorrer um sem opinião ou não querendo responder.

(i) Determine a lei de probabilidade da v.a.r. X.

(ii) Deduza o número médio de indivíduos interrogados até ocorrer um sem opinião ou não querendo responder.

3. Seja Q uma probabilidade sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, onde $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$, de função de distribuição F.

a) Prove que, para todo o número real x, $\lim_{n\to\infty} F\left(x + \frac{1}{\log n}\right)$ existe e determine o seu valor. Conclua que F é contínua à direita.

v.s.f.f.

b) Suponha agora que Q é uma probabilidade absolutamente contínua de densidade f estritamente positiva.

(i) Sendo U uma variável aleatória real (v.a.r.) uniformemente distribuída no intervalo $[0,1]$, mostre que a v.a.r. $X = F^{-1}(U)$ está bem definida e segue a lei de probabilidade Q.

(ii) Considere a densidade g definida por

$$g(x) = \frac{1}{2}\exp\left(-|x|\right), \ x \in \mathbb{R},$$

e determine a função de distribuição que lhe está associada.

(iii) Sejam $u_1, ..., u_n$, n observações da v.a.r. U. Exprima, em função de $u_1, ..., u_n$, n observações de uma v.a.r. X seguindo a lei de densidade g.

4. O rendimento conjunto de dois produtos financeiros, promovidos por certo Banco de Investimento, evolui de acordo com certos índices da Bolsa de Valores e é bem descrito por um vector aleatório real (ve.a.r.) (X, Y) absolutamente contínuo de densidade

$$f(x,y) = \frac{4}{x^3 y}\mathbb{I}_{]y,+\infty[\times]1,+\infty[}(x,y).$$

a) Prove que X é uma v.a.r. absolutamente contínua de densidade

$$f_X(x) = \frac{4\log x}{x^3}\mathbb{I}_{]1,+\infty[}(x).$$

b) Serão X e Y v.a.r. independentes entre si?

c) Calcule, caso exista, o rendimento médio conjunto dos referidos produtos financeiros.

d) Calcule a probabilidade do acontecimento $\left\{\frac{X}{Y} \leq 2\right\}$. Que pode concluir sobre o valor 2 para a distribuição da v.a.r. $\frac{X}{Y}$?

Cotação:

1.	2.5 valores
2.	5.5 valores
3.	6.0 valores
4.	6.0 valores