

Exame de Probabilidades

Duração: 2h30m

04-02-05

Observação: A resolução completa das questões apresentadas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

- ✓ I. Considere um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{A}, P) e seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de acontecimentos de \mathcal{A} , partição do conjunto Ω e tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(A_n) > 0.$$

- ✓ 1. Seja $k \in \mathbb{N}$, arbitrariamente fixo. Prove que a função $P(\cdot / A_k)$ definida sobre \mathcal{A} por

$$P(B/A_k) = \frac{P(B \cap A_k)}{P(A_k)}, \quad B \in \mathcal{A},$$

é uma probabilidade sobre (Ω, \mathcal{A}) .

- ✓ 2. Prove que, para todo o acontecimento $C \in \mathcal{A}$, se tem

$$P(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(C/A_n)P(A_n).$$

- ✓ 3. Sejam X e Y variáveis aleatórias reais (v.a.r.) definidas sobre (Ω, \mathcal{A}, P) , independentes e discretas de suporte \mathbb{N}_0 . Prove que

$$\forall r \in \mathbb{N}_0, P(X + Y = r) = \sum_{j=0}^r P(X = r - j)P(Y = j).$$

- ✓ 4. Suponha que as v.a.r. X e Y , consideradas na questão anterior, seguem leis de Poisson de parâmetros respectivamente designados por λ e μ .

- ✓ a) Mostre que (X, Y) é um vector aleatório real discreto e identifique a sua função de probabilidade.
 ✓ b) Obtenha o valor médio de (X, Y) .
 ✓ c) Recorrendo à igualdade referida na questão 3, obtenha a lei de probabilidade de $X + Y$.

II. Determinada fábrica de calçado produz para o mercado dos países da União Europeia e para o mercado externo a esta União, consumindo tal mercado externo apenas 30% da produção da fábrica. Todo o calçado produzido pela fábrica é sujeito a um controlo final de qualidade que pode não ser totalmente eficaz, no caso daquele ser defeituoso. Assim, no calçado produzido para o mercado externo à União Europeia o controlo de qualidade detecta 5% de calçado defeituoso, havendo 2% do mesmo tipo que não é detectado. Por outro lado, no conjunto da produção para o mercado da União há 90% de calçado que o controlo de qualidade considera em boas condições. Do calçado defeituoso não detectado pelo controlo de qualidade 35% vai para o mercado externo.

- ①. Prove que há 1,7% de calçado defeituoso produzido pela fábrica não detectado no controlo de qualidade.
 ②. Obtenha a percentagem de calçado não defeituoso produzido efectivamente pela fábrica.
 ✓ 3. Determine a probabilidade de que num lote de 1000 peças de calçado observadas aleatoriamente e de forma independente à saída da cadeia de produção existam pelo menos 25 peças defeituosas não detectadas. Que conclusão pode tirar?

III. No fabrico de certo tipo de mobiliário de escritório por módulos são cortadas peças retangulares de madeira com comprimento e largura previamente fixados. O processo de corte está sujeito a falhas pelo que as verdadeiras medidas das peças podem afastar-se das previamente fixadas. Sabe-se que os erros, em milímetros, das medidas dos comprimentos e larguras das referidas peças são descritos, respectivamente, por v.a.r. X e Y de distribuição conjunta absolutamente contínua de densidade

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{6\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{9} + y^2\right)}.$$

- ✓ 1. Mostre que as v.a.r. X e Y são independentes e normalmente distribuídas.
- ✓ 2. Calcule a probabilidade de que ambas as medidas em análise não se afastem dos valores previamente fixados mais do que 3 mm.
3. Considere a v.a.r. $Z = X^2$, que descreve o erro quadrático associado aos comprimentos das referidas peças.
 - a) Determine os 1º e 3º quartis da distribuição de Z .
 - ✓ b) Calcule o erro quadrático médio dos referidos comprimentos.
 - c) Prove que Z é uma v.a.r. absolutamente contínua e indique uma versão da sua densidade.
 - d) Identifique a lei de (Z, Y) .

Cotação:

- I. 8.0
- II. 4.0
- III. 8.0