Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Probabilidades

Duração: 2h 30m 15-09-06

I

1. Considere um qualquer espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de acontecimentos de $\mathcal{A}$.

a) Diga em que condições será $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de acontecimentos independentes.

b) Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de acontecimentos de $\mathcal{A}$ independentes. Prove que

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{2n}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} P\left(A_{2n}\right).$$

c) Suponha que é efectuado o lançamento, em simultâneo, de dois dados equilibrados com as faces numeradas de 1 a 6, registando-se os números das faces que ficam voltadas para cima. Considere que esta experiência é repetida sucessivamente nas mesmas condições e seja $\mathcal{E}$ a experiência aleatória resultante.

i) Indique o espaço de resultados associado a $\mathcal{E}$.

ii) Identifique o acontecimento A_n: "a soma dos números obtidos é igual a 6 no lançamento de ordem n", $n \in \mathbb{N}$, e calcule a sua probabilidade.

iii) Obtenha a probabilidade do acontecimento B: "a soma dos números obtidos é igual a 6 nalgum lançamento de ordem par".

2. As chamadas telefónicas para o país, feitas a partir de um determinado balcão dos CTT, são classificadas em locais, regionais e nacionais consoante a distância a que o destino se encontra (menos de 10 km, entre 10 e 50 km e mais de 50 km, respectivamente). Das chamadas para o país feitas a partir desse balcão, sabe-se que 50% são locais e 30% regionais. Por outro lado, 20% das chamadas locais e 15% das regionais têm duração superior a 5 minutos. Além disso, das chamadas com duração superior a 5 minutos, feitas a partir daquele balcão, 10% são nacionais.

a) Qual a percentagem de chamadas, feitas a partir do referido balcão, com duração quando muito igual a 5 minutos?

b) Sabe-se que das chamadas locais com duração superior a 5 minutos, feitas a partir daquele balcão, 35% têm duração superior ou igual a 8 minutos. Qual a probabilidade de uma qualquer chamada ser local e ter duração compreendida entre 5 e 8 minutos?

c) O tempo de duração (em minutos) das chamadas locais realizadas a partir daquele balcão é bem descrito por uma variável aleatória real (v.a.r.) X seguindo a lei exponencial de parâmetro $\frac{1}{3}$.

i) Calcule o tempo máximo de duração de 90% das chamadas locais.

ii) Caracterize a lei do tempo de duração de 10 chamadas locais realizadas a partir do referido balcão, independentemente umas das outras, e deduza o seu valor médio.

v.s.f.f.

II

1. Sejam X e Y variáveis aleatórias reais independentes de funções de distribuição G e H, respectivamente. Designe-se por F a função de distribuição do vector aleatório real bidimensional (X, Y).

a) Mostre que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = G(x)H(y)$$

b) Suponha que X e Y admitem valor médio. Mostre que $Cov(X, Y)$ existe e indique o seu valor.

2. Considere uma v.a.r. X absolutamente contínua de densidade

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) = \frac{2}{\pi\left(1+x^2\right)} \mathbb{I}_{]-1,1[}\left(x\right).$$

a) Mostre que a função de distribuição, F_X, de X é dada por

$$F_X(x) = \frac{2}{\pi}\left(arctg\, x + \frac{\pi}{4}\right) \mathbb{I}_{]-1,1]}\left(x\right) + \mathbb{I}_{]1,+\infty]}\left(x\right).$$

b) Determine os quartis da distribuição de X.

c) Considere a variável aleatória real $Y = X^2$.

i) Determine a lei de Y.

ii) Sendo R a função de distribuição de (X, Y), calcule $R(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Serão X e Y v.a.r. independentes?

iii) Calcule a probabilidade do acontecimento $\{Y > X\}$.

——————————————————————————

Cotação

I-1. 4.5 valores

2. 5.5 valores

II-1. 3.0 valores

2. 7.0 valores