Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Exame de Probabilidades

Duração: 2h 30m 06 - 01 - 2006

Observação: Na resolução das questões deverá justificar o raciocínio utilizado e apresentar todos os cálculos efectuados.

I

1. Considere um qualquer espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de acontecimentos de $\mathcal{A}$.

a) Diga em que condições será $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de acontecimentos independentes.

b) Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de acontecimentos de $\mathcal{A}$ independentes. Prove que

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \prod_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

c) Uma empresa de fabrico de vidro tem a sua cadeia de produção em funcionamento permanente, sendo as diferentes execuções da referida cadeia independentes entre si. Seja p, $p \in]0,1[$, a probabilidade de que uma qualquer execução da cadeia de produção possa falhar. Mostre que é quase certo que, estando a cadeia em funcionamento permanente, há pelo menos uma execução que falha.

2. Determinada empresa de distribuição de frutas e legumes fornece três tipos de clientes: hipermercados, supermercados e pequenos mercados de bairro. Um estudo estatístico realizado sobre tal empresa permitiu concluir que dos produtos fornecidos aos hipermercados, 6% perdem a validade na primeira semana e 2% não apresentam já condições para serem vendidos. Relativamente ao grupo constituído pelos supermercados e mercados de bairro, 5% dos produtos a distribuir perdem a validade na primeira semana e 1% não apresentam já condições para venda. Sabe-se ainda que 7% dos produtos que a empresa tem para distribuição ou perdem a validade na primeira semana ou não apresentam já condições para serem vendidos.

a) Calcule a percentagem de produtos da referida empresa que são adquiridos pelos hipermercados.

b) Qual a probabilidade de que um produto que já não tenha condições para venda venha a ser adquirido por um hiperpermercado?

c) Sabendo que 60% dos clientes são hipermercados, determine o número máximo de tais superfícies comerciais que, com uma probabilidade de 94,91%, estão incluídos num grupo de 20 clientes da referida empresa de distribuição.

II

1. Seja (X, Y) um vector aleatório real absolutamente contínuo de densidade f e seja ψ uma função real, definida sobre $\mathbb{R}^2$, contínua.

a) Mostre que $\psi(X, Y)$ é uma variável aleatória real (v.a.r.) e diga em que condições existe valor médio de $\psi(X, Y)$, definindo-o nesse caso.

b) Suponha que X e Y são v.a.r. independentes com valores médios $E(X)$ e $E(Y)$, respectivamente. Prove que a v.a.r. $Z = XY$ admite valor médio e indique o seu valor.

v.p.f.

2. No fabrico de portas e janelas de alumínio são utilizadas máquinas de medição e corte de barras normalizadas daquele material; tal processo de medição e corte está sujeito a falhas que levam a que os comprimentos das peças cortadas não coincidam exactamente com os previamente definidos. Sabe-se que os erros, em milímetros, dos comprimentos das barras cortadas por uma dessas máquinas são descritos por uma v.a.r. X de distribuição normal centrada e de desvio padrão σ ($\sigma > 0$ e fixo).

a) Calcule a probabilidade de que o erro dos comprimentos de tais barras não se afaste dos valores previamente fixados mais do que 2σ mm.

b) Considere a v.a.r. $Z = |X|$, que descreve o erro absoluto associado aos comprimentos das referidas barras.

i. Prove que Z é uma v.a.r. absolutamente contínua e indique uma versão da sua densidade.

ii. Calcule o erro absoluto médio dos referidos comprimentos.

c) Suponha $\sigma = 2$ e considere uma v.a.r. Y descrevendo o erro de medida associado a uma outra máquina com as mesmas funções. Sabe-se que a lei do vector aleatório real (X, Y) tem por função característica a função

$$\forall\,(u, v) \in \mathbb{R}^2, \Phi\,(u, v) = e^{-\frac{1}{2}\left(4u^2+5v^2\right)}.$$

i. Conclua que X e Y são v.a.r. independentes e identifique a lei de Y.

ii. Determine a lei da v.a.r. $T = |X - Y|$ e indique o seu valor médio.

iii. Determine a ($a > 0$) de modo que os erros relativos a cada uma das referidas máquinas não difiram, com 99% de probabilidade, mais do que a mm.

iv. Obtenha, caso exista, a variância da v.a.r. $Z - 4Y - 5$.

Cotação

I-1. 4.0 valores

2. 4.5 valores

II-1. 3.0 valores

2. 8.5 valores