

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Probabilidades

Duração: 2h 30m

01 - 02 - 2006

**Observação:** Na resolução das questões deverá justificar o raciocínio utilizado e apresentar todos os cálculos efectuados.

I

1. Considere um qualquer espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  e seja  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de acontecimentos de  $\mathcal{A}$ .

a) Diga em que condições existe o acontecimento  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$  e defina-o nesse caso.

b) Suponha que existe o acontecimento  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$ . Prove que  $P\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$ .

c) Seja  $Q$  uma lei de probabilidade sobre  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ , absolutamente contínua, de densidade

$$f(x) = \frac{1}{6}\mathbb{I}_{]-2,0[}(x) + \frac{2}{3}\mathbb{I}_{]0,1[}(x).$$

i. Obtenha a função de distribuição da lei de probabilidade  $Q$ .

ii. Considere a sucessão de elementos de  $\mathcal{B}$ ,  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , tal que  $B_n = \left[-1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$ . Determine, caso exista, a probabilidade do acontecimento  $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n$ . Que pode dizer sobre  $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q(B_n)$ ?

2. Foi realizada uma sondagem com o objectivo de recolher informações sobre a opinião dos cidadãos quanto à eventual decisão política de proibição de fumar em lugares públicos. Dos resultados de tal inquérito concluiu-se que 60% dos inquiridos são favoráveis a tal proibição, 35% discordam dela e os restantes não têm opinião ou não querem responder.

Relativamente à faixa etária, verificou-se que 80% dos inquiridos favoráveis a tal proibição têm mais de 30 anos e que  $\frac{2}{3}$  dos inquiridos com 30 anos no máximo são-lhe desfavoráveis. Verificou-se ainda que dos inquiridos que não têm opinião ou não querem responder 60% têm mais de 30 anos.

a) Determine a percentagem de indivíduos inquiridos com mais de 30 anos.

b) Obtenha a percentagem de inquiridos que discordam da referida proibição entre os que têm mais de 30 anos .

c) Sabendo que os inquéritos individuais foram realizados sempre nas mesmas condições e independentemente uns dos outros, determine o número mínimo de indivíduos que é necessário interrogar para que com uma probabilidade de pelo menos 95% se encontre pelo menos um desfavorável à referida proibição.

v.p.f.

## II

1. Seja  $(X, Y)$  um vector aleatório real de função característica  $\Phi$ .

a) Prove que a variável aleatória real (v.a.r.)  $Z = aX + bY$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , tem por função característica a função  $\Phi_Z(t) = \Phi(at, bt)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

b) Suponha que a função característica  $\Phi$  considerada é tal que

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \Phi(u, v) = \exp\left(2iu - \frac{1}{2}(u^2 + 2uv + 4v^2)\right).$$

i. Identifique as leis das variáveis aleatórias reais  $X$  e  $Y$  e prove que  $X$  e  $Y$  não são mutuamente independentes.

ii. Determine, neste caso, a lei de  $Z$ . Que conclusão pode tirar?

2. Seja  $X$  uma v.a.r. que descreve o rendimento relativo aos créditos concedidos diariamente por determinada agência bancária. Sabe-se que  $X$  segue a lei de Pareto de parâmetro  $\beta$  ( $\beta > 2$ ), isto é, a lei de densidade

$$f_\beta(x) = \frac{\beta}{x^{\beta+1}} \mathbb{I}_{1,+\infty}(x).$$

a) Determine o rendimento médio dos créditos concedidos diariamente por tal agência bancária.

b) Mostre que os logaritmos de tais rendimentos diários são bem descritos por uma v.a.r.  $Y$  seguindo a lei exponencial de parâmetro  $\beta$ .

c) Sejam  $X_1, X_2$  e  $X_3$  v.a.r. independentes e identicamente distribuídas com  $X$ , descrevendo o referido rendimento em três dias distintos. Definam-se as v.a.r.  $Y_i = \log X_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

i. Determine a matriz de variâncias-covariâncias de  $(X_1, X_2, X_3)$ .

ii. Mostre que a v.a.r.  $Z = \min(Y_1, Y_2)$  segue a lei exponencial de parâmetro  $2\beta$ .

iii. Calcule a probabilidade do acontecimento  $\{Z > Y_3\}$ .

### Cotação

I-1. 5.5 valores

2. 4.0 valores

II-1. 3.0 valores

2. 7.5 valores