Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Teste de Probabilidades

Duração: 1h30m 08–11–2005

Observação: A resolução completa das questões apresentadas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Considere um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e seja B um acontecimento de $\mathcal{A}$ tal que $P(B) > 0$.

a) Defina probabilidade condicionada por B e prove que tal função é uma probabilidade sobre $(\Omega, \mathcal{A})$.

b) Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n acontecimentos de $\mathcal{A}$ tais que $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0$. Prove que
$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\, P(A_2 | A_1) \ldots P\left(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

2. Um estudo de controlo de qualidade efectuado sobre certa editora presente no mercado livreiro permitiu concluir que a probabilidade de um seu livro ocorrer com qualquer defeito de edição é de 10^{-4}. Suponha que a referida editora lançou recentemente no mercado uma obra com uma tiragem de 150000 exemplares.

a) Indique, justificando convenientemente, qual a lei de probabilidade da variável aleatória real (v.a.r.) X: "*número de exemplares com defeito presentes na referida edição*".

b) Sabendo que nessa edição existem pelo menos 10 exemplares com defeito, qual a probabilidade de que tal número seja inferior a 25.

c) Determine o número máximo de exemplares com defeito que, com uma probabilidade de pelo menos 90%, podem ocorrer nessa edição.

3. O tempo de vida (em meses) de certo tipo de componentes de um sistema informático é descrito por uma v.a.r. X de lei absolutamente contínua de densidade

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) = \frac{1}{10} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{5}\sqrt{x}} \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(x).$$

a) Mostre que a v.a.r. $Y = \sqrt{X}$ segue a lei exponencial de parâmetro igual a $\frac{1}{5}$.

b) Determine o número médio de meses de duração de tais componentes informáticas.