**Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra**
**Exame de Probabilidades**

Duração: 2h 30m 09 - 01 - 2007

**Observação**: Na resolução das questões deverá justificar o raciocínio utilizado e apresentar todos os cálculos efectuados.

**1.** Considere um qualquer espaço probabilizável $(\Omega, \mathcal{A})$ e seja $P$ uma função definida sobre $\mathcal{A}$, com valores em $[0,1]$, aditiva e tal que $P(\Omega) = 1$.

**a)** Prove que $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$, para todos $A, B \in \mathcal{A}$.

**b)** Considere uma sucessão qualquer $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de acontecimentos de $\mathcal{A}$ e seja $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão definida por $B_n = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k - \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ .

**i.** Prove que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} \subseteq B_n \text{ e } \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n = \emptyset.$$

**ii.** Supondo que $P$ verifica a propriedade de continuidade monótona, conclua que $P$ é uma probabilidade sobre $(\Omega, \mathcal{A})$.

**2.** No processo de controlo de qualidade que ocorre à saída de uma cadeia de produção de determinado tipo de peças de vidro, as peças podem ser rejeitadas por apresentarem defeitos ligados ou à estrutura do vidro, que não deve apresentar bolhas de ar, ou ao peso das peças, que não pode ser nem superior a $219.6\,gr$ nem inferior a $180.4\ gr$. Tais defeitos, designados $d_1$ e $d_2$, ocorrem independentemente um do outro, sabendo-se que o defeito $d_1$ ocorre em 2.5% das peças. Sabe-se ainda que o peso das peças é bem descrito por uma variável aleatória real (v.a.r.) $X$ com distribuição normal de média $200\,gr$ e desvio padrão $10\,gr$.

**a)** Determine a percentagem de peças de vidro que são rejeitadas à saída da cadeia de produção.

**b)** Indique a percentagem de peças que, no conjunto das que são rejeitadas à saída da cadeia de produção, apresentam um único defeito.

**c)** Determine o número de peças que são, em média, aceites até ocorrer a primeira que é rejeitada.

**3.** Seja $X$ uma v.a.r. definida sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de função de distribuição $F$.

**a)** Mostre que $x$ $(x \in \mathbb{R})$ é ponto de descontinuidade de $F$ se e somente se $P(X = x) > 0$.

**b)** Seja $\mathcal{D}$ o conjunto dos pontos de descontinuidade de $F$. Justificando convenientemente, indique uma condição sobre $\mathcal{D}$ necessária e suficiente para que

**i.** a lei de $X$ seja discreta;

**ii.** a lei de $X$ seja difusa.

**c)** Seja $Y$ uma v.a.r. definida sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e seguindo a lei absolutamente contínua de densidade $f(x) = \exp(-(x+2))\,\mathbb{I}_{]-2,+\infty[}$. Considere a v.a.r.

$$X = \begin{cases} Y, & \text{se } Y > 0 \\ 0, & \text{se } Y \leq 0 \end{cases} .$$

Prove que a lei de $X$ não é discreta nem difusa.

**v.p.f.**

**4.** Seja $X$ uma v.a.r. definida sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, absolutamente contínua, de densidade

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}} \mathbb{I}_{]1,+\infty[}(x),$$

onde $\theta$ $(\theta > 1)$ é um parâmetro arbitrariamente fixo. Sejam $X_1, ..., X_n$ $n$ v.a.r. independentes e identicamente distribuídas com $X$.

**a)** Prove que, para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$, a v.a.r. $Y_i = 2\theta \ln X_i$ segue uma lei exponencial.

**b)** Determine $M$ tal que

$$\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}, \; i \neq j, \; P\left[\min\left(Y_i, Y_j\right) < M\right] \geq \frac{3}{4}.$$

**c)** Caracterize a lei da v.a.r. $Z_n = \sum_{i=1}^{n} \ln X_i$ e conclua que é uma lei admitindo momentos de todas as ordens.

## Cotação

**1.** 4.5 valores

**2.** 5.0 valores

**3.** 5.0 valores

**4.** 5.5 valores