Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Exame de :Probabilidades

Duração: 2h 30m 31 - 01 - 2007

Observação: Na resolução das questões deverá justificar o raciocínio utilizado e apresentar todos os cálculos efectuados.

I

1. Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade e B um acontecimento de $\mathcal{A}$ de probabilidade, P, estritamente positiva. Considere uma sucessão $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de acontecimentos de $\mathcal{A}$ independentes relativamente a probabilidade condicionada pelo acontecimento B, P_B.

   a) Mostre que os acontecimentos A_i, A_j^c são independentes relativamente a P_B, para todos i e j tais que i $\neq j$.

   b) Prove que $P_B(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c) = 1 - \prod_{n=1}^{\infty} P_B(A_n)$.

2. Em determinado material podem encontrar-se impurezas de dois tipos aqui designados por "tipo A" e "tipo B", sendo que as impurezas do tipo A ocorrem independentemente das do tipo B. Em ensaios laboratoriais é possível, nalguns casos, identificar a presença destas impurezas através da aplicação de determinado produto químico a amostras do referido material. Com efeito, após a aplicação daquele produto, o material adquire um tom azulado sempre que tem apenas impurezas de tipo A. Além disso, se o material tiver apenas impurezas de tipo B, então fica azulado em 5% dos casos e se tiver impurezas dos dois tipos, o material fica azulado em 10% dos casos. Nas amostras sem impurezas o referido produto não provoca alterações. Sabe-se ainda que 10% das amostras apresentam impurezas do tipo A e 1% das amostras apresentam impurezas do tipo B.

   a) Determine a probabilidade do material adquirir um tom azulado quando é submetido à acção do referido produto.

   b) Qual a probabilidade do material ficar azulado se tiver impurezas?

   c) Determine o número mínimo de diferentes amostras do referido material que devem ser ensaiadas, de modo independente e nas mesmas condições, para que com uma probabilidade mínima de 50% pelo menos uma adquira o tom azulado.

II

1. Num estudo probabilista associado a determinado processo eleitoral envolvendo apenas dois candidatos A e B, designa-se por X a proporção (aleatória) dos potenciais votantes no candidato A e por Y a correspondente proporção para os votantes no candidato B. Um estudo estatístico empírico permitiu concluir que (X, Y) é um vector aleatório real absolutamente contínuo com densidade de probabilidade da forma

$$f(x,y) = \frac{12}{7}\left(x^2 + \frac{y}{2}\right)\mathbb{I}_{[0,1]\times[0,1]}(x,y).$$

   a) Qual a proporção média de votantes no candidato A?

   b) Serão as variáveis aleatórias reais (v.a.r.) X e Y independentes entre si?

   c) Determine a probabilidade de que venha a ganhar o candidato A com uma diferença de votos inferior a 10%.

v.p.f.

2. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.r. independentes e identicamente distribuídas com a lei normal $N(m, \sigma)$

a) Encontre a lei do vector aleatório real $(X_1, \ldots, X_n)$ e indique os respectivos valor médio e matriz de variâncias-covariâncias.

b) Considere a v.a.r. $Y = \sum_{j=1}^{n} a_j X_j$, com $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, e obtenha a sua lei.

3. Uma v.a.r. X é gerada, com o recurso a um *software* estatístico, de acordo com uma lei normal centrada e reduzida. A partir desta variável gera-se uma outra, Y, recorrendo a experiência aleatória "lançamento de um dado equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6" do seguinte modo:

$$Y = \begin{cases} X, & \text{se ocorre face numerada com um múltiplo de 3} \\ -X, & \text{em qualquer outro caso.} \end{cases}$$

a) Mostre que Y segue a mesma lei que X.

b) Considere agora o número aleatório que resulta da soma dos outros dois, isto é, o número descrito pela v.a.r. $Z = X + Y$.

i. Calcule a probabilidade do acontecimento $\{|Z| \leq 1\}$.

ii. Conclua que X e Y não são v.a.r. independentes entre si.

Cotação

I.1. 3.0

2. 4.5

II.1. 5.5

2. 3.0

3. 4.0