Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Teste de Probabilidades

Duração: 30m 18-12-06

Observação: A resolução completa das questões apresentadas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Considere um vector aleatório real (ve.a.r.) (X, Y) absolutamente contínuo de densidade f tal que

$$\forall\,(u,v) \in \mathbb{R}^2,\ f(u,v) = g(u)\ h(v),$$

onde g e h são densidades de probabilidade sobre $\mathbb{R}$.

a) Justifique que X e Y são variáveis aleatórias reais (v.a.r.) absolutamente contínuas e mostre que g e h são as respectivas densidades marginais.

b) Prove que X e Y são v.a.r. independentes.

c) Suponha que X segue a lei normal de valor médio 2 e desvio padrão 1 e que Y admite como densidade a função

$$h(v) = \frac{1}{v^2}\mathbb{I}_{]1,+\infty[}\,(v)\,.$$

Que pode concluir sobre o valor médio da v.a.r. $Z = XY$?

2. Seja (X, Y) um ve.a.r descrevendo a escolha aleatória de um ponto de $\mathbb{R}^2$ de acordo com a distribuição de probabilidade absolutamente contínua de densidade

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1+xy}{4}, & |x| \leq 1, |y| \leq 1 \\ \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a) Prove que as v.a.r. X e Y são identicamente distribuídas.

b) Calcule a probabilidade de que o ponto aleatoriamente escolhido tenha pelo menos uma componente de valor superior $\frac{1}{2}$.

c) Determine a função característica da lei marginal.