

**Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra**  
**Frequência de Probabilidades**

Duração: 1h 30m

09 - 11 - 2007

**Observação:** Na resolução das questões deve justificar o raciocínio utilizado e apresentar todos os cálculos efectuados.

- (2.0) **1.** Sejam  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  um espaço de probabilidade e  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de acontecimentos de  $\mathcal{A}$ . Considere a sucessão  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definida por

$$B_1 = A_1 \text{ e } B_n = A_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k, \quad n \geq 2.$$

a) Mostre que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ .

b) Deduza que  $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ .

c) Suponha agora que  $P(A_n) = 1$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ . Prove que  $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$ .

- (2.5) **2.** Numa clínica psiquiátrica os primeiros contactos dos doentes são sempre direccionados para o Serviço de Assistência Social. Este Serviço está, no entanto, tão ocupado que apenas 60% dos referidos doentes conseguem aceder imediatamente a um assistente social. Aos restantes 40% é pedido que deixem o seu contacto a fim de que aquele Serviço os venha a contactar mais tarde, sendo 75% destes ainda contactados por tal Serviço no mesmo dia; os outros só são contactados no dia seguinte. A experiência de funcionamento da clínica permite concluir que a probabilidade de virem a contactar tal clínica para consulta os doentes que acederam de imediato a um assistente social é 0.8, sendo tal probabilidade igual a 0.6 no caso daqueles que são recebidos por um assistente social ainda no dia em que realizaram o seu primeiro contacto. Além disso, 5% dos doentes que vêm a contactar a clínica para consulta, só foram atendidos por um assistente social no dia seguinte ao do seu primeiro contacto.

- a) Qual a percentagem dos doentes que vêm a contactar a clínica para consulta?  
b) Obtenha a probabilidade de alguém vir a contactar a clínica para consulta, no caso em que só foi atendido por um assistente social no dia seguinte ao seu primeiro contacto.  
c) Determine o número mínimo de doentes que contactam a clínica, de modo independente e nas mesmas condições, para que, com uma probabilidade mínima de 95%, pelo menos um a venha a contactar para consulta.

- (1.0) **3.** Considere um sistema eléctrico em paralelo, isto é, formado por  $n$  componentes separadas a trabalhar independentemente umas das outras e que está em funcionamento desde que pelo menos uma das componentes o faça. Designe por  $A_i$  o acontecimento "a componente  $i$  falha",  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

- a) Indique uma condição sobre os acontecimentos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  que garanta a sua independência estocástica.  
b) Obtenha, em função das probabilidades dos acontecimentos  $A_i$ , a probabilidade do sistema estar em funcionamento.

- (2.5) **4.** Num processo de controlo de qualidade de determinado tipo de material regista-se o número de peças desse material em bom estado até ocorrer a primeira com defeito. Sabendo que as peças foram sendo observadas independentemente umas das outras e sempre nas mesmas condições, designe por  $X$  a variável aleatória real (v.a.r.) que descreve aquele número aleatório.

- a) Sendo  $p$  ( $p \in ]0, 1[$ ) a probabilidade de ocorrência de material com defeito, prove que  $X$  é uma v.a.r. discreta de função de probabilidade  $f(x) = p(1-p)^x \mathbb{I}_{\mathbb{N}_0}(x)$ .  
b) Obtenha a função de distribuição da v.a.r.  $X$ .  
c) Estudos estatísticos efectuados permitiram inferir o valor 0.01 para a probabilidade de ocorrência de material com defeito. Determine, nestas condições, a probabilidade de se registarem pelo menos 60 peças em bom estado até ocorrer a primeira com defeito.