Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Frequência de Probabilidades

Duração: 1h 30m — 21 - 12 - 2007

Observação: Na resolução das questões deve justificar o raciocínio utilizado e apresentar todos os cálculos efectuados.

(1.0) **1.** Seja Q uma probabilidade sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, onde $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$, de função de distribuição F. Prove que se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $Q(\{a\}) \neq 0$ então a função F não é contínua.

(2.5) **2.** Suponha que foi gerada, com o recurso a um *software* estatístico, uma variável aleatória real (v.a.r.) X, seguindo uma lei uniforme no intervalo $[-1, 1]$.

a) Determine a probabilidade de ocorrer um qualquer número do intervalo $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$.

b) A partir desta variável gera-se uma outra, Y, recorrendo à experiência aleatória "lançamento de uma moeda de *euro* equilibrada", do seguinte modo:

$$Y = \begin{cases} X, & \text{se ocorre face } \textit{euro} \\ -X, & \text{se ocorre a face específica do país.} \end{cases}.$$

Mostre que Y segue a mesma lei do que X.

c) Considere agora o número aleatório que resulta da soma dos outros dois, isto é, o número descrito pela v.a.r. $Z = X + Y$.

i. Calcule a probabilidade dos acontecimentos $\{Z = r\}$, para todo $r \in \mathbb{R}$ e conclua que a lei da v.a.r. Z não é discreta nem difusa.

ii. Obtenha a função de distribuição da v.a.r. Z.

(1.5) **3.** Considere um vector aleatório real (ve.a.r.) (X, Y) definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Diga em que condições será (X, Y) um ve.a.r. absolutamente contínuo.

b) Suponha que (X, Y) é absolutamente contínuo e de componentes independentes. Indique uma condição sob a qual a variável aleatória real (v.a.r.) $Z = XY$ admita valor médio e, sob essa condição, obtenha o seu valor.

(3.0) **4.** Suponha que, numa certa região do país, se pretende fazer um estudo de mercado sobre dois fertilizantes agrícolas, A e B, produzidos por uma determinada empresa. Representa-se por X a proporção de potenciais compradores do fertilizante A e por Y a proporção de potenciais compradores do fertilizante B. Sabe-se que X e Y são v.a.r. com função densidade de probabilidade conjunta

$$f(x, y) = \frac{2}{5}(x + 4y)\, \mathbb{I}_{[0,1]\times[0,1]}(x, y).$$

a) Prove que a função densidade de X é dada por $g(x) = \frac{2}{5}(x + 2)\mathbb{I}_{[0,1]}(x)$.

b) Calcule a proporção esperada de potenciais compradores de A.

c) Mostre que X e Y são variáveis aleatórias correlacionadas.

d) Qual a probabilidade de que o produto B seja preferido em relação ao produto A?