

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA  
Teste de Probabilidades

**Duração:** 20 min

04-03-08

**Observação:** A resolução completa das questões apresentadas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

- I. Seja  $\mathcal{A}$  a  $\sigma$ -álgebra gerada pela classe dos intervalos contidos em  $]1, +\infty[$ . Considere a sucessão  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $\mathcal{A}$  definida por

$$A_n = \left] a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right], \quad n \in \mathbb{N},$$

onde  $a, b \in [2, +\infty[$ , com  $b \geq a$ .

1. Mostre que a sucessão  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tem limite e determine-o.
2. Considere agora o espaço de probabilidade  $(]1, +\infty[, \mathcal{A}, P)$ , com  $P$  tal que

$$P([x, y]) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}, \quad \forall x, y \in ]1, +\infty[ \text{ e } x < y.$$

- a) Determine a probabilidade do acontecimento  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ .
  - b) Mostre que o conjunto singular  $\{3\}$  é um elemento de  $\mathcal{A}$  de probabilidade nula.
- II. Na terapêutica de determinada doença um médico receita aos seus doentes pelo menos um de dois medicamentos,  $A$  e  $B$ . Em 70% dos casos o médico receita o medicamento  $A$ , sendo de 40% a percentagem correspondente para o medicamento  $B$ .
- É introduzido no mercado um novo medicamento  $C$  para complementar o efeito dos dois já existentes. Para analisar o efeito do medicamento  $C$ , o médico receita-o a 30% dos doentes que só tomam  $A$ , a 60% dos que apenas tomam  $B$  e a 10% dos que tomam  $A$  e  $B$ .
- Determine a probabilidade de que o médico não receite o medicamento  $C$  a um dos referidos doentes, escolhido ao acaso.