Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Probabilidades

Duração: 2h 30m 01-07-08

Observação: A resolução completa dos problemas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Considere um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ associado a uma experiência aleatória $\mathcal{E}$ e seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de acontecimentos de $\mathcal{A}$ tais que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ A_n \supset A_{n+1}.$$

a) Prove que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem limite e indique o acontecimento limite.

b) Suponha que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ P(A_n) = p^n,\ \ \text{com } p \in]0,1[.$$

(i) Determine a probabilidade de que ocorra pelo menos um dos acontecimentos A_n, $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Qual a probabilidade de ocorrerem todos os acontecimentos A_n, $n \in \mathbb{N}$?

(iii) Prove que é quase certa a realização de, quando muito, um número finito de acontecimentos A_n, $n \in \mathbb{N}$.

2. Numa fábrica são produzidos *chips* de memória para serem usados na montagem de computadores pessoais. Os *chips* fabricados são sujeitos a uma inspecção que não é completamente eficaz. Assim, sabe-se que 5% dos *chips* defeituosos são aprovados na inspecção, enquanto que, no caso dos *chips* não defeituosos, a percentagem de aprovações é de 98%. Sabe-se ainda que 95% dos *chips* fabricados são aprovados pela inspecção.

a) Qual a percentagem de *chips* defeituosos produzidos na fábrica?

b) Calcule a probabilidade de que um *chip* recusado pela inspecção seja de facto defeituoso.

c) Admitindo que no processo de inspecção os *chips* são observados independentemente uns dos outros e sempre nas mesmas condições, determine o número médio de *chips* aprovados até ocorrer o primeiro que é recusado.

3. Considere n variáveis aleatórias reais, $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, definidas sobre um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, independentes e identicamente distribuídas com uma variável aleatória real X de função de distribuição F, desconhecida.

Para cada $x \in \mathbb{R}$, seja $F_n^{\bullet}(x)$ uma função real definida sobre Ω por

$$\forall \omega \in \Omega, \quad F_n^{\omega}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{]-\infty,x]}(X_i(\omega)).$$

Prove que, para cada $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\forall c > 0, \quad P\left(F(x) \in [F_n^{\bullet}(x) - c, F_n^{\bullet}(x) + c]\right) \geq 1 - \frac{1}{4nc^2}.$$

v.p.f.

4. O tempo (em minutos) que decorre entre duas chegadas consecutivas de veículos a um posto de abastecimento de combustível P_1 é descrito por uma variável aleatória real (v.a.r.) X absolutamente contínua seguindo a lei exponencial de parâmetro θ, $\theta > 0$.

a) Estudos estatísticos permitiram inferir que, em média, decorrem 2 minutos entre duas chegadas consecutivas de veículos ao referido posto. Qual o valor de θ?

b) Determine a função de distribuição de X.

c) Sabendo que entre duas chegadas consecutivas decorre um intervalo de tempo de pelo menos 30 segundos, calcule a probabilidade de tal intervalo de tempo não ser superior a 3 minutos.

d) Suponha agora que, noutro posto de abastecimento P_2, o tempo (em minutos) que decorre entre duas chegadas consecutivas de veículos é descrito por uma v.a.r. Y absolutamente contínua, independente de X, seguindo a lei exponencial de parâmetro $\frac{2}{3}$.

(i) Que pode afirmar sobre o valor médio de (X, Y)?

(ii) Determine a probabilidade de que o tempo que decorre entre duas chegadas de veículos ao posto P_2 seja superior ao tempo correspondente no posto P_1.

(iii) Obtenha a lei da v.a.r. $Z = \frac{1}{2}X + \frac{2}{3}Y$.

Cotação

1. 4.5 valores
2. 5.0 valores
3. 2.5 valores
4. 8.0 valores