Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Exame de Probabilidades

Duração: 2h 30m 10 - 01 - 2008

Observação: Na resolução das questões deverá justificar o raciocínio utilizado e apresentar todos os cálculos efectuados.

1. Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade e B um acontecimento qualquer de $\mathcal{A}$ de probabilidade, P, estritamente positiva. Considere a função P_B definida por

$$\forall A \in \mathcal{A},\ P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

a) Mostre que P_B é uma probabilidade sobre $(\Omega, \mathcal{A})$.

b) Considere n acontecimentos de $\mathcal{A}$, $A_1, A_2, ..., A_n$, tais que $P_B\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0,\ n \geq 2$. Prove que

$$P_B\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P_B(A_1) \prod_{i=2}^{n} P_{B\cap A_1 \cap \ldots \cap A_{i-1}}(A_i),\ n \geq 2.$$

c) Em que condições são os acontecimentos $A_1, A_2, ..., A_n$ mutuamente independentes relativamente à probabilidade P_B?

d) Considere a experiência aleatória "lançamento de dois dados equilibrados com as faces numeradas de 1 a 6 e registo do total de pontos obtidos". Use tal experiência para mostrar que, num espaço de probabilidade finito, um acontecimento pode ter probabilidade nula e não ser o acontecimento impossível.

2. Certa companhia de seguros classifica os seus clientes do ramo automóvel em três classes, de acordo com a seu histórico neste domínio: segurados de baixo risco, médio risco e alto risco. Os registos da companhia indicam que as probabilidades de que segurados de baixo risco, médio risco e alto risco se vejam, durante um ano, envolvidos num acidente são, respectivamente, 0.05, 0.15 e 0.3. Sabe-se ainda que metade da população dos clientes da companhia é de risco médio e que 60% da parte restante é de alto risco.

a) Determine a percentagem de segurados da companhia que se vê envolvida em acidentes num qualquer ano fixo.

b) Se em 2007 determinado segurado da companhia não regista acidentes, qual a probabilidade de este ser um segurado de baixo risco?

c) Determine o número máximo de segurados da companhia, a observar aleatoriamente em 2007 entre os de baixo risco, para que com uma probabilidade máxima de 99% pelo menos um se tenha visto envolvido nesse ano num acidente.

3. Sejam X e Y variáveis aleatórias reais (v.a.r.) independentes, absolutamente contínuas de funções densidade g e h, respectivamente.

a) Mostre que o vector aleatório real bidimensional (X, Y) é absolutamente contínuo de densidade

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = g(x)h(y).$$

b) Suponha que X e Y admitem valor médio. Mostre que $Cov(X, Y)$ existe e indique o seu valor.

v.p.f.

4. O tempo (em minutos) entre duas chegadas consecutivas a uma certa repartição pública nos períodos do dia de maior afluência é descrito por uma v.a.r. X seguindo a lei exponencial de parâmetro $\frac{3}{2}$.

a) Calcule a probabilidade de tal intervalo de tempo ser inferior a 1.5 minutos.

b) Determine a lei da v.a.r. $Y = e^X$.

c) Prove que Y admite apenas momentos de primeira ordem.

d) Suponha agora que nos períodos de menor afluência o referido tempo entre chegadas é descrito por uma v.a.r. Z, independente de X, seguindo a lei exponencial de parâmetro $\frac{1}{2}$.

i. Deduza a lei da v.a.r. $U = \max(X, Z)$.

ii. Calcule o valor médio de U e interprete o resultado obtido.

e) Determine, caso exista, o valor médio da v.a.r. $V = XYZ$.

Cotação

1. 5.0

2. 4.0

3. 3.0

4. 8.0