Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Probabilidades

Duração: 2h 30m 18-07-08

Observação: A resolução completa dos problemas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Considere uma sucessão $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de acontecimentos da σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}_2$, tal que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ B_n \subset B_{n+1}.$$

a) Prove que existe o acontecimento $\lim\limits_{n\to\infty} B_n$ e identifique-o.

b) Seja (X, Y) um vector aleatório real (ve.a.r.) bidimensional, com função de distribuição $F_{(X,Y)}$ tal que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ F_{(X,Y)}(x, y) = F(x)\, G(y),$$

onde F e G são funções de distribuição sobre $\mathbb{R}$.

(i) Prove que F é a função de distribuição da variável aleatória real (v.a.r.) X.

(ii) Determine a lei de probabilidade da v.a.r. $Z = \min(X, Y)$.

2. Numa fábrica, o arroz é empacotado por duas máquinas, A e B, cada uma das quais é responsável por metade da produção dos pacotes de arroz. O peso dos pacotes de arroz (em quilogramas) é uma v.a.r. com distribuição normal $N(1, 0.025)$.

Um pacote é considerado defeituoso se fica mal fechado ou se apresenta um peso fora das especificações pré-definidas, as quais determinam que tal peso deve estar entre $0.95\,kg$ e $1.05\,kg$. Sabe-se que 6% dos pacotes produzidos são defeituosos e que 1% apresentam os dois tipos de defeitos.

a) Ocorrerão os dois tipos de defeitos independentemente um do outro?

b) Sabe-se ainda que, dos pacotes produzidos pela máquina A, 2% ficam mal fechados, 4% apresentam peso fora das especificações e 1% apresentam os dois tipos de defeitos.

(i) Calcule a probabilidade de que um pacote produzido pela máquina B fique mal fechado.

(ii) Qual a probabilidade de que um pacote defeituoso tenha sido produzido pela máquina A?

c) Um pequeno comerciante pretende comprar 100 pacotes de arroz à fábrica, com a condição de apenas aceitar a encomenda se, ao inspeccionar 10 pacotes retirados ao acaso de entre os 100 que receber, não encontrar nenhum com peso a menos. Ainda assim, o gerente da fábrica decide colocar dois pacotes nessas condições na encomenda do comerciante. Determine a probabilidade deste aceitar a encomenda.

v.p.f.

3. Sejam X e Y duas v.a.r. que descrevem, respectivamente, o tempo (em minutos) que decorre entre duas chegadas consecutivas de clientes a um posto de atendimento e o tempo (em minutos) que um cliente leva a ser atendido. Suponha que o ve.a.r. (X, Y) é absolutamente contínuo com função de distribuição dada por

$$F_{(X,Y)}(x, y) = 0.2\, y\, (1 - e^{-0.2x})\, \mathbb{1}_{]0,+\infty[\times]0,5]}(x, y) + (1 - e^{-0.2x})\, \mathbb{1}_{]0,+\infty[\times]5,+\infty[}(x, y).$$

a) Mostre que as v.a.r. X e Y são absolutamente contínuas de densidades dadas, respectivamente, por

$$f(x) = 0.2\, e^{-0.2x}\, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) \quad \text{e} \quad g(x) = 0.2\, \mathbb{1}_{]0,5]}(x).$$

b) Calcule a probabilidade de que nenhum dos dois tempos, X e Y, exceda 4 minutos.

c) Determine o valor médio e a variância de Y.

d) Sejam $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ as v.a.r. que representam os tempos de atendimento, no referido posto, de n clientes independentes.

(i) Caracterize a lei de probabilidade da v.a.r. $\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

(ii) Que pode concluir acerca do valor médio e da variância da v.a.r. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$?

Cotação

1. 5.0 valores
2. 6.5 valores
3. 8.5 valores