**Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra**
**Exame de Probabilidades**

Duração: 2h 30m — 30 - 01 - 2008

**Observação**: Na resolução das questões deverá justificar o raciocínio utilizado e apresentar todos os cálculos efectuados.

**1.** Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade e $B$ um acontecimento qualquer de $\mathcal{A}$ de probabilidade, $P$, estritamente positiva. Considere a função $P_B$ definida por

$$\forall A \in \mathcal{A},\ P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

**a)** Mostre que $P_B$ é uma probabilidade sobre $(\Omega, \mathcal{A})$.

**b)** Sejam $E$, $F$ e $G$ acontecimentos de $\mathcal{A}$ mutuamente independentes relativamente a $P_B$.

**i.** Prove que os acontecimentos $E^c$ e $F^c$ são mutuamente independentes relativamente a $P_B$.

**ii.** Serão os acontecimentos $E^c$, $F^c$ e $G$ também mutuamente independentes relativamente a $P_B$?

**c)** Considere a experiência aleatória que consiste em tirar ao acaso uma carta de um baralho de 52 cartas, não viciado, e seja $B$ o acontecimento "*saída de carta de paus ou ás*".

**i.** Indique o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ associado a esta experiência, identifique o acontecimento $B$ neste espaço e obtenha a sua probabilidade.

**ii.** Considere os acontecimentos $C \equiv$"*saída de carta de ouros*" e $D \equiv$"*saída de ás*". Mostre que os acontecimentos $C$ e $D$ são independentes em $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mas não o são em $(\Omega, \mathcal{A}, P_B)$.

**2.** Um supermercado tem para venda em determinado dia, café de duas marcas, A e B, sendo este apresentado em embalagens de 500g e de 250g e nas qualidades "robusta" e "arábica". Sabe-se que é de 60% a percentagem de embalagens da marca A e que destas, 40% contêm café "arábica" e 5% são de 500g. Das embalagens da marca B, 40% são de café de qualidade "robusta"; por outro lado, das embalagens de 250g, 25% são da marca B. Relativamente a cada uma das marcas A e B, a quantidade de café nas embalagens e a correspondente qualidade são características independentes.

**a)** Determine a percentagem de embalagens de 250g de café que existem, nesse dia, no supermercado.

**b)** Calcule a percentagem de embalagens de 250g de café arábica existentes, nesse dia, no supermercado.

**c)** Calcule a probabilidade de que, de 15 embalagens de café vendidas nesse dia no supermercado, de forma independente e nas mesmas condições, pelo menos 2 sejam de 250g de café arábica.

**3.** Seja $X$ uma variável aleatória real (v.a.r.) absolutamente contínua, de função densidade $f$.

**a)** Mostre que a lei de probabilidade da v.a.r. $X$ é difusa.

**b)** Diga em que condições existe valor médio de $X$ e, nesse caso, defina-o.

**c)** Sendo $Y$ uma v.a.r., independente de $X$, absolutamente contínua de densidade $g$, verifique que a v.a.r. $Z = \max(X, Y)$ é absolutamente contínua e indique uma versão da sua densidade.

**v.p.f.**

**4.** A escolha aleatória de um ponto no quadrado $[-1,1] \times [-1,1]$ é descrita por uma lei de probabilidade absolutamente contínua de densidade

$$f(x,y) = \frac{1+xy}{4} \mathbb{I}_{[-1,1]\times[-1,1]}(x,y) .$$

Seja $(X,Y)$ o vector aleatório real descrevendo tais pontos aleatórios.

**a)** Determine a probabilidade de que, em tal escolha aleatória, ocorra um qualquer ponto do rectângulo $[0,1] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ .

**b)** Prove que as variáveis aleatórias $X$ e $Y$ são identicamente distribuídas com a lei uniforme sobre $[-1,1]$ .

**c)** Obtenha a função de distribuição comum às v.a.r. $X$ e $Y$.

**d)** Determine o valor médio de $(X,Y)$.

**e)** Mostre que as variáveis $X$ e $Y$ são correlacionadas.

**f)** Calcule a probabilidade de que ocorram pontos de abcissa inferior à ordenada.

## Cotação

**1.** 5.0

**2.** 4.0

**3.** 3.0

**4.** 8.0