Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Frequência de Probabilidades

Duração: 1h30m 02/06/2008

Observação: Na resolução das questões deverá justificar o raciocínio utilizado e apresentar todos os cálculos efectuados.

1. Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade e B um acontecimento qualquer de $\mathcal{A}$ de probabilidade, P, estritamente positiva. Considere a função P_B definida por

$$\forall A \in \mathcal{A},\ P_B\,(A) = \frac{P\,(A \cap B)}{P\,(B)}.$$

Mostre que P_B é uma probabilidade sobre $(\Omega, \mathcal{A})$.

2. A população de determinada zona sofre de uma doença que pode manifestar-se na forma maligna ou na forma benigna. Sabe-se que 6% da população sofre da doença na forma maligna e 4% sofre da doença na forma benigna.

Para o seu diagnóstico, é efectuado um teste que dá resultado positivo para qualquer indivíduo com a doença na forma maligna. Por outro lado, se um indivíduo sofre da forma benigna da doença, o teste dá resultado positivo com probabilidade 0.75. O teste dá ainda resultado positivo para 5% dos indivíduos que não sofrem da doença.

a) Qual a probabilidade do teste dar resultado positivo quando aplicado a um indivíduo escolhido ao acaso na população?

b) Calcule a probabilidade do teste dar um resultado errado.

3. Seja X uma variável aleatória real (v.a.r.) definida sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, discreta, de suporte $S = \{-2, -1, 1, 2\}$ e função de probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{4}\mathbb{1}_S(x).$$

Considere a v.a.r. $Y = \frac{1}{X^2}$.

a) Calcule $P(X = -1,\, Y = 1)$.

b) Justifique que a v.a.r. $\frac{1}{X}$ admite momentos simples de todas as ordens, sendo nulos os de ordem ímpar.

c) Verifique que $E(XY) = E(X)E(Y)$.

d) Que pode concluir quanto à independência das v.a.r. X e Y?

v.s.f.f.

4. Num processo de fabrico de peças de alumínio a utilizar na construção civil é usada uma máquina **A** que corta automaticamente peças cujo comprimento (em metros) é bem representado por uma v.a.r. X seguindo a lei normal de média 2 e desvio padrão 0.01.

a) Calcule a probabilidade de que uma peça, seleccionada aleatoriamente de entre as cortadas por aquela máquina, tenha menos de $1.99m$.

b) Qual a probabilidade de que, num grupo de 10 peças retiradas de forma independente da produção da máquina, haja pelo menos uma com menos de $1.99m$?

c) Seja Y a v.a.r. que descreve o comprimento das peças cortadas por uma outra máquina **B** com as mesmas características de **A** e funcionando independentemente desta.

(i) Determine a lei do vector aleatório real (X, Y).

(ii) Identifique a lei da v.a.r. que traduz o o comprimento total de duas peças, uma cortada pela máquina **A** e outra cortada pela máquina **B**.

Cotação

1. 1.5

2. 3.5

3. 5.0

4. 5.0