Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Exame de Probabilidades

Duração: 2h30m 01-07-09

Observação: A resolução completa das questões apresentadas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

I. Considere um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e seja B um acontecimento de $\mathcal{A}$ tal que $P(B) > 0$.

1. Defina probabilidade condicionada por B e prove que tal função é uma probabilidade sobre $(\Omega, \mathcal{A})$.

2. Sejam $A_1,\ A_2, ...,\ A_n,\ n$ acontecimentos de $\mathcal{A}$ não quase certos e tais que os acontecimentos $A_1^c,\ A_2^c, ...,\ A_n^c$ formam uma partição de Ω. Prove que

$$\forall k \in \{1, 2, ..., n\}, \quad P(A_k^c/B) = \frac{P\left(A_k^c\right) P\left(B/A_k^c\right)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(A_i^c\right) P\left(B/A_i^c\right)}.$$

II. No processo de controlo de qualidade que ocorre à saída de uma cadeia de produção de determinado tipo de rolamentos para automóveis, as peças podem ser rejeitadas por apresentarem defeitos ligados à sua estrutura ou ao seu peso, que não pode ser nem superior a $1023.26g$ nem inferior a $976.74g$. Tais defeitos, designados d_1 e d_2, ocorrem independentemente um do outro, sabendo-se que o defeito d_1 ocorre em 2.5% das peças. Sabe-se ainda que o peso dos rolamentos é bem descrito por uma variável aleatória real (v.a.r.) X com distribuição normal de média $1kg$ e desvio padrão $10g$.

1. Determine a percentagem de rolamentos que são rejeitados à saída da cadeia de produção.

2. Entre os rolamentos rejeitados à saída da cadeia de produção, qual a percentagem dos que apresentam um único defeito?

3. O envio dos referidos rolamentos para distribuição é feito em caixas de 50 rolamentos cada.

a) Determine a lei da v.a.r. Y que descreve o peso líquido de cada caixa.

b) Calcule o peso líquido máximo de 95% das caixas a serem enviadas para distribuição.

III. Seja X uma v.a.r. absolutamente contínua de densidade f e função de distribuição F.

1. Defina lei de probabilidade sobre $\mathbb{R}$ absolutamente contínua e mostre que a lei de X é difusa.

2. Prove que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt,\ x \in \mathbb{R}.$$

IV. O tempo que decorre entre dois reabastecimentos consecutivos de determinado tipo de frutas num hipermercado é bem descrito por uma v.a.r. absolutamente contínua, X, de suporte $S = [a, +\infty[$ ($a \in]0, +\infty[$, arbitrariamente fixo) e função densidade

$$f(x) = \frac{1}{3}\, e^{-\frac{x-a}{3}},\ x \in S.$$

1. Obtenha a função de distribuição da v.a.r. X.

2. Determine o intervalo interquartil associado à v.a.r. X e interprete o resultado obtido.

v.p.f.

3. Suponha que num outro hipermercado da mesma empresa o tempo que decorre entre dois reabastecimentos consecutivos do mesmo tipo de frutas é descrito por uma v.a.r. Y independente de X e seguindo a mesma lei.

a) Caracterize a lei do vector aleatório real (X, Y) e calcule a probabilidade do acontecimento $\{X > Y\}$.

b) Prove que a v.a.r. $Z = \max(X, Y)$ é absolutamente contínua, sendo uma versão da sua densidade a função

$$h(x) = \frac{2}{3}\, e^{-\frac{x-a}{3}}(1 - e^{-\frac{x-a}{3}}),\ x \in S.$$

c) Considerando os dois hipermercados em estudo, deduza o tempo máximo médio que decorre entre dois reabastecimentos consecutivos do referido tipo de frutas.

Cotação

I - 3.5 valores

II - 5.0 valores

III - 3.5 valores

IV - 8.0 valores