Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Probabilidades

Duração: 1h 30m 08-06-09

Observação: Na resolução das questões deverá justificar o raciocínio utilizado e apresentar todos os cálculos efectuados.

(4.0) **1.** Seja Q a lei de probabilidade sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, absolutamente contínua, de densidade

$$f(x) = \begin{cases} 1/4, & x \in]-2, 0[\\ 1/2, & x \in [0, a[\\ 0, & \text{em qualquer outro caso} \end{cases}, \text{ onde } a \text{ é uma constante real a determinar.}$$

Considere a sucessão de elementos de $\mathcal{B}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que

$$B_n = \left[-1 - \frac{1}{n^2}, 1 - \frac{1}{n}\right].$$

a) Determine o valor de a.

b) Mostre que existe $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n$ e calcule a sua probabilidade.

c) Sem efectuar cálculos, conclua que existe $\lim\limits_{n\to+\infty} Q(B_n)$ e indique o seu valor.

(4.0) **2.** Num inquérito feito num país da União Europeia para estudar a abstenção em determinadas eleições para o Parlamento Europeu, 30% dos inquiridos declararam ir votar, 45% disseram ainda não ter decidido se o iriam ou não fazer, os restantes declararam ter decidido não o fazer.

Relativamente à faixa etária, verificou-se que 70% dos inquiridos que declararam ir votar tinham pelo menos 40 anos e que 40% dos inquiridos com menos de 40 anos estavam ainda indecisos sobre o que iriam fazer. Verificou-se ainda que, entre os inquiridos, há 10% que declararam não ir votar e têm pelo menos 40 anos.

a) Determine a percentagem de indivíduos inquiridos com menos de 40 anos.

b) Determine a probabilidade de que um dos inquiridos que ainda não decidiu se iria votar tenha pelo menos 40 anos.

c) Sabe-se que a probabilidade de numa região desse país um cidadão eleitor não ter qualquer informação sobre eleições europeias é de 0.01%. Supondo que nessa região há 150000 cidadãos eleitores, calcule a probabilidade de que pelo menos 20 não tenham qualquer informação sobre tais eleições.

(6.0) **3.** Seja (X, Y) um vector aleatório real (ve.a.r.) absolutamente contínuo de densidade f.

a) Prove que X e Y são variáveis aleatórias reais absolutamente contínuas (v.a.r.) e indique uma versão das respectivas densidades.

b) Suponha agora que f é a função tal que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \exp\left((x - e^x) + (y - e^y)\right).$$

i) Determine a lei marginal da v.a.r. X.

ii) Prove que as v.a.r. são independentes e identicamente distribuídas.

iii) Determine a lei de probabilidade da v.a.r. $Z = e^X$.

iv) Calcule o valor médio da v.a.r. $U = \exp(X + Y)$.