Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Probabilidades

Duração: 2h 30min 23-06-2010

Observação: A resolução completa das questões apresentadas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Seja Ω um conjunto finito e não vazio e seja $\mathcal{P}(\Omega)$ o conjunto das partes de Ω.

a) Prove que a função P definida por

$$\forall A \subseteq \Omega, \quad P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

é uma probabilidade sobre $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

b) Mostre que toda a probabilidade sobre $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ que atribui igual valor aos acontecimentos elementares coincide com P.

2. Um estudo sobre a sinistralidade rodoviária num certo troço de uma via rápida revelou que 80% do tráfego é diurno e que, à noite, a probabilidade de ocorrer um acidente é o dobro da probabilidade de tal ocorrência durante o dia.

a) Verifique que, entre os acidentes que ocorrem naquele troço, $\frac{1}{3}$ ocorre durante a noite.

b) Seja X a variável aleatória real (v.a.r.) que representa o número de acidentes registados no referido troço, num certo período de tempo, até que ocorra pela primeira vez um acidente durante o dia. Suponha que os acidentes ocorrem independentemente uns dos outros.

(i) Prove que a v.a.r. X é discreta com função de probabilidade $f(x) = \dfrac{2}{3^x} \mathbb{I}_{\mathbb{N}}(x)$.

(ii) Determine a probabilidade de, naquele período, se registarem mais de 30 acidentes até ocorrer o primeiro durante o dia.

3. Considere um vector aleatório real bidimensional (X, Y) de função de distribuição F.

a) Prove que a função de distribuição da v.a.r. X, F_X, verifica

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y),$$

com $y \in \mathbb{R}$.

b) Suponha que a v.a.r. X não é quase-certa e admite momento de segunda ordem e que $Y = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Determine o coeficiente de correlação entre X e Y.

v.p.f.

4. Considere o vector aleatório real (X, Y), absolutamente contínuo, cuja função de distribuição é dada por

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x+y-1}, & x > 1 \text{ e } y > 1 \\ \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Calcule a probabilidade de que o maior dos valores atingidos pelas v.a.r. X e Y seja superior a 2 mas não exceda 3.

b) Verifique que a função densidade de probabilidade de X é dada por $f_X(x) = \dfrac{1}{x^2}\, \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(x)$.

c) Mostre que a v.a.r. X não admite momentos.

d) Calcule a probabilidade de X tomar valores inferiores a 2. Como interpreta o valor 2 relativamente à distribuição da v.a.r. X?

5. Suponha que X, Y e Z são v.a.r. descrevendo, respectivamente, o número de veículos que chegam a uma estação de serviço para abastecer de gasolina sem chumbo 95, gasolina sem chumbo 98 e gasóleo, num determinado período de tempo.

Sabe-se que X, Y e Z seguem leis de Poisson de parâmetros 10, 4 e 2, respectivamente, e que as chegadas dos veículos são independentes entre si. Determine a probabilidade de, naquele período de tempo, chegarem pelo menos 20 veículos à referida estação de serviço para abastecer de algum daqueles tipos de combustível.

Cotação:
1. 3.0
2. 4.5
3. 4.0
4. 7.0
5. 1.5